Linjär algebra

Innehåll

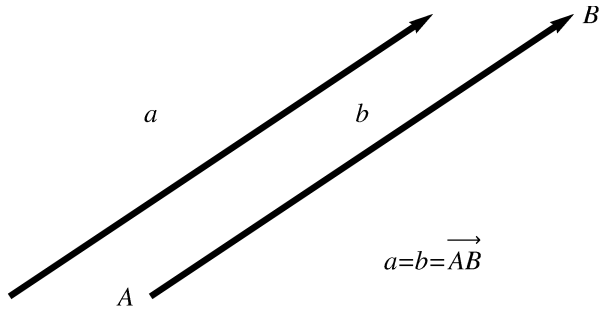
2

Grundläggande algebra

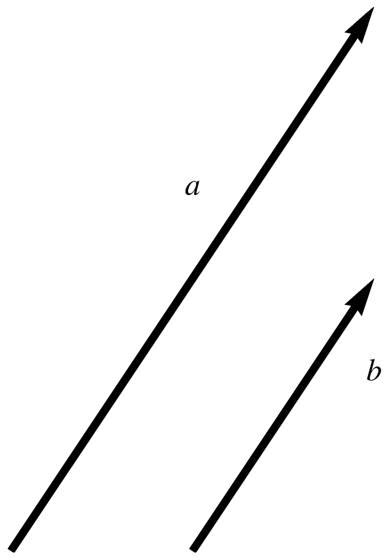
5

Vektorer

5.1 Geometrisk vektor



Två vektorer som är lika långa och parallella är lika.



Vektorerna $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ är parallella: $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.
Vi ser att $2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$.

5.1.1 Längd av vektor

Längden av en vektor $\boldsymbol{a}$, skrivs $|\boldsymbol{a}|$ och är ett reellt tal ≥ 0.

5.1.2 Vinkel mellan två vektorer

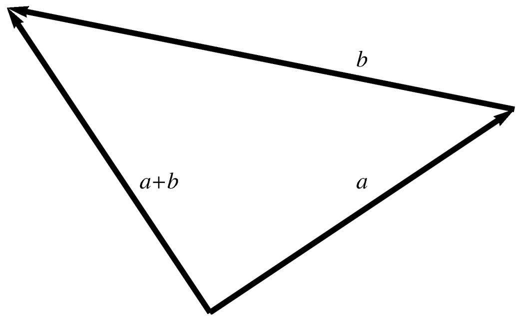
Exempel 5.1 Vi kan räkna ut vinkeln mellan dessa vektorer m.h.a. vanlig trigonometri.
Vinkeln mellan vektorerna $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ kan vi få genom att införa $\boldsymbol{c} := \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ och se dessa

som sidor i en triangel med längder $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{10}$ och $c = \sqrt{5}$. Cosinussatsen ger då att

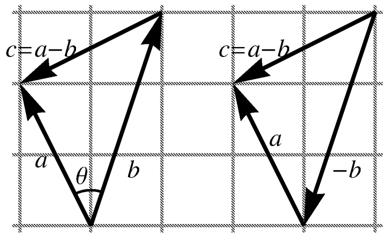
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{5+10-5}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \theta = 45^\circ\,.$$

■

5.1.3 Addition av vektorer



Vektoradditionen är kommutativ.



Speciellt är $-\boldsymbol{b}$ samma vektor som $\boldsymbol{b}$ men motsatt riktad; De är antiparallella med varandra. $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} := \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$. Speciellt är $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$, *nollvektorn*.

5.1.4 Skalär produkt

Uttrycket

$$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta =: \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{5.1}$$

kallas *skalär produkt*. Det är ett mått på två vektorers samverkan. Det är ett reellt tal (en skalär), inte en ny vektor.

Projektion

Med skalär produkt kan vi uttrycka projektionen av vektorn $\boldsymbol{b}$ på vektorn $\boldsymbol{a}$, som

$$|\boldsymbol{b}|\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\,.$$

Exempel 5.2 Är det möjligt att $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 5$ och $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -3$, och vad blir vinkeln mellan vektorerna i så fall?

Lösning: $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \le |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$, så dess värden är möjliga, eftersom $|\cos\theta| \le 1$. Vi får vidare att

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = -\frac{3}{10} \Leftrightarrow \theta = \arccos(-3/10) \approx 107.5^\circ\,.$$

■

Några specialfall

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2,\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$$

Att vi har ekvivalens ovan behöver en liten förklaring. Om ex.vis $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, nollvektorn, så blir $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ men är $\boldsymbol{0}$ vinkelrät mot en annan vektor $\boldsymbol{a}$? Svaret är "ja". Nollvektorn är vinkelrät mot varje vektor. Eller mer generellt, nollvektorn $\boldsymbol{0}$ bildar alla vinklar med alla vektorer, per definition.

Exempel 5.3 Förenkla

$$2\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})-\boldsymbol{b}(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+2|\boldsymbol{a}|^2$$

och förenkla

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2$$

Lösning:

$$2\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})-\boldsymbol{b}(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+2|\boldsymbol{a}|^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}|^2=-|\boldsymbol{b}|^2.$$

och

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2.$$

Nu är sista termen

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\{\text{distr. lagen}\}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=$$

$$|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2.$$

Alltså är $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=0$

■

Nu är $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta|\leq|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot 1$, eftersom $|\cos\theta|\leq 1$. Den sista identiteten ger följande olikhet

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2\leq|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|^2=(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2.$$

Genom att dra roten ur respektive led fås *triangelolikheten*

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|. \tag{5.2}$$

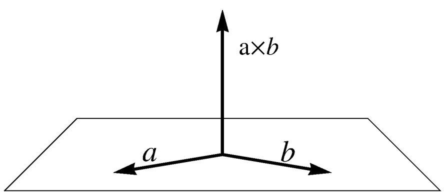
5.1.5 Vektorprodukt

För koordinatsystem och vektorer i $\mathbb{R}^3$ behövs en orientering av tre axlar eller tre vektorer. Med höger tumme, pekfinger och långfinger (i den ordningen) får man ett *högersystem*. Förutom skalärpordukt, som är ett reellt tal, finns vektoriell produkt eller vektorprodukt. För två vektorer $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ i (enbart) $\mathbb{R}^3$ definieras deras vektorprodukt $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, som den vektor

(i) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ bildar ett högersystem,

(ii) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ och

(iii) längden $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta$, där θ är mellanliggande vinkel.



Några elementära egenskaper

1. $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ (antikommutativitet).
2. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, nollvektorn (ty $\theta = 0°$ och $\sin 0° = 0$).
3. $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$ med likhet omm $\theta = 90°$.

Man kan visa att vektorprodukten inte är associativ (lätt) men *är* distributiv (svårt). Associativeten gäller inte trots att båda vektorerna

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} \text{ och } \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

existerar.

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}. \qquad (5.3)$$

(5.3) är vänsterdistriburiva lagen. Även högerdistributiva lagen gäller.

Exempel 5.4 Låt $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ och $\boldsymbol{e}_z$ vara enhetsvektorer längs koordinataxlarna i $\mathbb{R}^3$ i ett högersystem.
Förenkla

(a) $|\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y|$,

(b) $\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_x$,

(c) $\boldsymbol{e}_x\cdot(\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_x)$,

(d) $(\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y)\times\boldsymbol{e}_x$ och $\boldsymbol{e}_x\times(\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_x)$.

Lösning: Alla tre har längd 1 och är parvis vinkelräta mot varandra.

(a) $|\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y| = \sqrt{2}$.

(b) $\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_x = -\boldsymbol{e}_z$.

(c)
$$\boldsymbol{e}_x\cdot(\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z) = \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x = |\boldsymbol{e}_x|^2 = 1.$$

(d)
$$(\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y)\times\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y$$

och
$$\boldsymbol{e}_x\times(\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_x) = \boldsymbol{e}_x\times(-\boldsymbol{e}_z) = \boldsymbol{e}_y.$$

Detta bevisar dock inte att vektorprodukten inte är associativ.

■

5.2 Vektor i koordinatsystem

En vektor i ett koordinatsystem har en representation som en ortsvektor. Detta betyder att startpunkten är origo $0 = (0;0)$ eller $== (0;0;0)$ beroende vilket rum det handlar om. Vektorn representeras då av sin slutpunkt $P = (x;y)$. Vektorn

$$\overrightarrow{OP} = (x,y).$$

Observera skillnaden mellan koordinater för punkt och komposanter för vektor!

Exempel 5.5 Beräkna vektorn $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$, där $\boldsymbol{a} = (-1,2)$ och $\boldsymbol{b} = (1,3)$ i exempel 5.1.
Beräkna också dess längd.

Lösning:

$$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-3,-4)\Longrightarrow ||\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=...=5\,.$$

■

Vi kan skriva dessa vektorer $\boldsymbol{a}=(-1,2)$ och $\boldsymbol{b}=(1,3)$. Vi kan dessutom räkna ut skalärprodukten. Vi observerar först att

$$(x,0)\cdot(0,y)=0 \text{ eftersom } (x,0)\perp(0,y)\,.$$

Dock gör vi det först med bokstäver, ex.vismed $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$ och $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$. Distributiva lagen ger

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (x_1,y_1)\cdot(\boldsymbol{x}_2,y_2)=((x_1,0)+(0,y_1))\cdot((x_2,0)+(0,y_2))= \\ &= (x_1,0)\cdot(x_2,0)+(0,y_1)\cdot(0,y_2)\end{aligned}$$

eftersom de två övriga produkterna $=0$ (vinkelräta vektorer). Återstår $(x_1,0)\cdot(x_2,0)=|x_1|\cdot|x_2|\cdot\cos\theta$, och $(0,y_1)\cdot(0,y_2)=|y_1|\cdot|y_2|\cdot\cos\theta$. Antingen har x_1 och x_2 samma tecken och då är $\theta=0^\circ$. Då är

$$(x_1,0)\cdot(x_2,0)=|x_1|\cdot|x_2|\cdot\cos 0^\circ=x_1x_2\cdot 1\,.$$

Eller så har x_1 och x_2 olika tecken och då är $\theta=180^\circ$.

$$(x_1,0)\cdot(x_2,0)=|x_1|\cdot|x_2|\cdot\cos 180^\circ=-|x_1x_2|=x_1x_2\,.$$

P.s.s. med $(0,y_1)\cdot(0,y_2)=|y_1|\cdot|y_2|\cdot\cos\theta$. Alltså är

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2\,. \tag{5.4}$$

och p.s.s. för högre dimensioner.

Exempel 5.6 Vi skriver vektorerna i exempel 5.1 på komponentform: Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\boldsymbol{a}=(-1,2)$ och $\boldsymbol{b}=(1,3)$.

Lösning: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-1,2)\cdot(1,3)=-1+6=5\,.$

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\theta=45^\circ\,.$$

■

Skalär produkt på komponentform ser likadan ut i alla dimensioner. Nedan ett exempel i $\mathbb{R}^3$.

Exempel 5.7 Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\boldsymbol{u}=(1,2,1)$ och $\boldsymbol{b}=(3,5,8)$.

Lösning:

$$\cos\theta=\frac{(1,2,1)\cdot(3,5,8)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9+25+64}}=\frac{21}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{98}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\theta=30^\circ\,.$$

■

5.2.1 Enhetsvektor

Definition 3 *En vektor* $\boldsymbol{e}$ *med längd* 1 *kallas enhetsvektor.*

Vi använder detta för vektorprodukt nedan.

Exempel 5.8 Vektorn $\boldsymbol{a} = (-1,2)$ är på kompontentform och har längden $\sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$. Bestäm den enhetsvektor $\boldsymbol{e}$, som är parallell med $\boldsymbol{a}$.

Lösning: Det verkar naturligt att multiplicera $\boldsymbol{a}$ med $\frac{1}{\sqrt{5}}$ för att få en en sådan enhetsektor, allltså

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2).$$

Denna vektor är parallell med $\boldsymbol{a}$. Återstår att visa att den har längden 1.

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{e}| &= |\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}} = 1 \text{ eller} \\
|\boldsymbol{e}| &= \frac{1}{\sqrt{5}}|(-1,2)| = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{(-1)^2+2^2} = 1.
\end{aligned}$$

■

Exempel 5.9 Speciellt är $(1,0) := \boldsymbol{e}_x$ och $(0,1) =: \boldsymbol{e}_y$ enhetsvektorer parallella med $x-$ respektive $y-$axeln. Vektorn $\boldsymbol{a} = (-,12)$ kan skrivas som...

$$\boldsymbol{a} = (-1,2) = (-1,0) + (2,0) = -1(1,0) + 2(0,2) = -1 \cdot \boldsymbol{e}_x + 2 \cdot \boldsymbol{e}_y.$$

P.s.s. kan $\boldsymbol{u} = (1,2,1)$ skrivas som

$$\boldsymbol{u} = (1,2,1) = (1,0,0) + (0,2,0) + (0,0,1) = \boldsymbol{e}_x + 2 \cdot \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z \text{ där}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_x &= (1,0,0) \\ \boldsymbol{e}_y &= (0,1,0) \\ \boldsymbol{e}_z &= (0,0,1) \end{cases} \tag{5.5}$$

■

5.2.2 Vektorprodukt i komponentform

Vi börjar med enhetsvektorerna i (5.5). Bl.a. är

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = (1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1) = \boldsymbol{e}_z.$$

Vidare är

$$(0,1,0) \times (0,0,1) = (1,0,0) \text{ och } (0,0,1) \times (1,0,0) = (0,1,0).$$

Därmed är ex.vis $(0,1,0) \times (1,0,0) = -(0,0,1)$. $(1,0,0) \times (1,0,0) = \boldsymbol{0} = (0,0,0)$. Även här utnyttjar vi distributiva lagen, fast nu för vektorprodukt. För två vektorer $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ på kompontentform

$$\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1) \text{ och } \boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

skall vi beräkna vektorpdrodukten

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2).$$

Vi skriver om

$$\boldsymbol{a} = x_1(1,0,0) + y_1(0,1,0) + z_1(0,0,1) \text{ och } \boldsymbol{b} = x_2(1,0,0) + y_2(0,1,0) + z_2(0,0,1).$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = \\
&= (x_1,0,0) \times (0,y_2,0) + (x_1,0,0) \times (0,0,z_2) + (0,y_1,0) \times (x_2,0,0) + \\
&+ (0,y_1,0) \times (0,0,z_2) + (0,0,z_1) \times (x_2,0,0) + (z_1,0,0) \times (0,y_2,0) = \\
&= (x_1y_2 - x_2y_1)(0,0,1) + (z_1x_2 - x_1z_2)(0,1,0) + (y_1z_2 - y_2z_1)(1,0,0) = \\
&= (y_1z_2 - y_2z_1, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - x_2y_1).
\end{aligned}$$

Denna produktregel för vektorer på komponentform är svår att komma ihåg. Man dock lätt beräkna den med en determinant:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{5.6}$$

Exempel 5.10 Beräkna vektorprodukten mellan $\boldsymbol{a} = (1,2,1)$ och $\boldsymbol{b} = (3,5,8)$.

Lösning: Eftersom $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ är nämnda i den ordningen är det $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ som skall beräknas och inte $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$. Som determinant blir den, enligt (5.6)

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = (11, -5, -1).$$

Vi verifierar att $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$:

$$(1,2,1) \cdot (11,-5,-1) = 11 - 10 - 1 = 0.$$

Vi kan försöka beräkna vinkeln mellan vektorerna $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$:

$$\sin\theta = \frac{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \frac{\sqrt{11^2 + (-5)^2 + (-1)^2)}}{\sqrt{6} \cdot 7\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{6} \cdot 7\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Vi kan dock inte dra slutsatsen att $\theta = 30^\circ$ eftersom det finns en supplementvinkel med samma sinusvärde, nämligen $\theta = 150^\circ$.

■

5.2.3 Några tillämpningar

Givet tre punkter P, Q och R i $\mathbb{R}^3$. De tre punkterna är hörn i en triangel. Vi skall beräkna arean av triangeln m.h.a. Areasatsen, som säger att arean

$$T = \frac{ab\sin\theta}{2}$$

där a och b är två sidolängder i triangeln och θ melllanliggande vinkel. Man kan bilda två vektorer, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ}$ och $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{PR}$. Arean av triangeln är då

$$T = \frac{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}{2}. \tag{5.7}$$

Observera att faktorn $\sin\theta$ är "inbyggd" i vektorprodukten.

Exempel 5.11 Punkterna $P(1;1;2)$, $Q = (2;3;3)$ och $R = (4;6;10)$ är hörn i en triangel. Beräkna triangelns area.

Lösning: Vi beräknar vektorerna

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (1,2,1) \text{ och } \boldsymbol{a} = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (3,5,8)$$

samma vektorer som i ett tidigare exempel. Triangelns area är

$$T = \frac{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}{2} = \frac{|(11,-5,-1)|}{2} = \frac{\sqrt{147}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

■

5.2.4 Linje i $\mathbb{R}^n$

En linje i $\mathbb{R}^2$ kan skrivas som $ax + by + c = 0$, där inte både a och b är noll. Linjens ekvation skall vi skriva på *parameterform*.

Exempel 5.12 Givet linjen på formen $2x - 3y = 6$. Vi löser ut ex.vis $y = \frac{2x}{3} - 2$. Vi kan sätta $x = 3t$ och får

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t - 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi kan skriva linjen ekvation som vektorer:

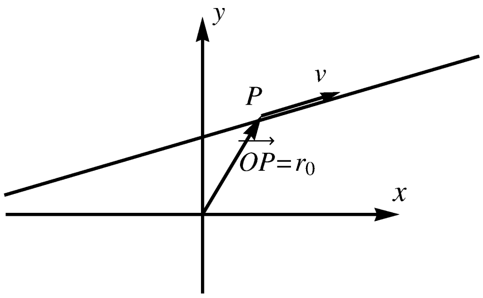
$$(x,y) = (0,-2) + t(3,2), \quad t \in \mathbb{R}$$

■

Allmänt kan linjens ekvation på *vektorform* skrivas

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t \cdot \boldsymbol{b}. \tag{5.8}$$

där $\boldsymbol{r} = (x,y)$, $\boldsymbol{r}_0 = (x_0,y_0)$ och $\boldsymbol{b} = (v_1,v_2)$, som är riktningsvektor för linjen.



P.s.s. kan en linje i $\mathbb{R}^3$ skrivas på vektorform och parameterform.

Exempel 5.13 Ge en ekvation för linjen som går genom punkterna $P = (1;1;2)$ och $Q = (2;3;3)$.

Lösning: Vi bildar en riktningsvektor $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ} = (2,3,3) - (1,1,2) = (1,2,1)$ samt vektorn $t\,(1,2,1) + (1,1,2) = (x,y,z)$, $t \in \mathbb{R}$. Detta är linjen på vektorform. Alternativt kan vi svara på *parameterform*

$$\begin{cases} x = & t+1 \\ y = & 2t+1 \\ z = & t+2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

■

Exempel 5.14 Givet linjen i föregående exempel och linjen

$$(x,y,z) = t(1,1,1) + (0,2,1).$$

Skär linjerna varandra och i så fall i vilken punkt?

Lösning: Vi sätter

$$(x,y,z) = s(1,1,1) + (0,2,1) = t(1,2,1) + (1,1,2)$$

och löser det så uppkomna ES. Lösningen är $(s,t) = (3,2)$ och alltså skär linjerna varandra i punkten

$$2(1;2;1) + (1;1;2) = (3;5;4).$$

■

Exempel 5.15 Givet tre punkter $P = (1;1;2)$, $Q = (2;3;3)$ och $R = (4;6;10)$. Dessa ligger *inte* på en linje. För att visa detta, ser vi att vektorerna $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ} = (1,2,1)$ och $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{PR} = (3,5,8)$ inte är (anti-)parallella. (Om de vore (anti-)parallella vore ju deras vektorprodukt $\mathbf{0}$, nollvektorn.) Då definierar de tre punkterna ett plan i $\mathbb{R}^3$, nämligen planet Π som punkterna ligger i. En *normalvektor* till planet är $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (11,-5,-1) =: \boldsymbol{n}$. Ex.vis är P en punkt i planet.

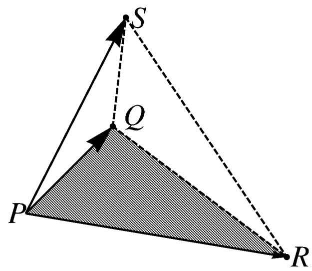
Att en punkt $(x;y;z) = X$ ligger i planet är ekvivalent med att vektorn $\overrightarrow{PX}$ är vinkelrät mot $\boldsymbol{n}$. Rita! Detta betyder att skalärprodukten $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0$. Utskrivet blir detta

$$(11,-5,-1) \cdot ((x,y,z) - (1,1,2)) = 11x - 5y - z - 4 = 0,$$

som är planets ekvation.

■

Exempel 5.16 Givet de tre punkterna ovan och en fjärde punkt $S = (3;4;5)$. Dessa fyra punkter är hörn i en tetraeder. Bestäm tetraederns volym.



Lösning: Bottenytan för tetraedern kan vara den som spänns upp av P, Q och R. Höjden är då $|\overrightarrow{PS}|\cdot\cos\varphi$, där φ är vinkeln mellan $\boldsymbol{n}$ och $\overrightarrow{PS} =: \boldsymbol{c}$. Volymen av en tetraeder är bottenytans area gånger höjden dividerat med 3. Volymen blir, så när som tecken,

$$V = \frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}{6}. \tag{5.9}$$

I detta fall är $\boldsymbol{c} = (2,3,3)$. Och

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (11,-5,-1)\cdot(2,3,3) = 4.$$

Volymen är alltså $V = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

■

Exempel 5.17 Beräkna avståndet mellan planet i exempel 5.15 och punkten $S = (3;4:5)$.

Lösning: Vi har att $(11,-5,-1) =: \boldsymbol{n}$ är normalvektor till planet Π och bildar vinkeln φ med $\overrightarrow{PS} =: \boldsymbol{c}$. Alltså är avståndet, sånär som på tecken,

$$d = |\overrightarrow{PS}|\cdot\cos\varphi = |\boldsymbol{c}|\cdot\cos\varphi.$$

Nu är

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\varphi,.$$

Alltså är avståndet d, sånär som på tecken

$$d = \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{n}|} \text{ och med siffor } d = \frac{(11,-5,-1)\cdot(2,3,3)}{7\sqrt{3}} = \frac{4}{7\cdot\sqrt{3}}.$$

■

Avståndet mellan plan och punkt kan också skrivas på följande sätt. Vi börjar dock med att skriva om täljaren. Vi sätter $\boldsymbol{n} = (A,B,C)$, så att

$$\boldsymbol{n}\cdot c = \boldsymbol{n}\cdot((x,y,z) - \overrightarrow{OP}) = Ax+By+Cz+D$$

där $D = -\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OP}$. Avståndet är alltså

$$d = \frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

5.2.5 Trippel skalär produkt

Produkten $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ med $\boldsymbol{a} = (x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2,y_2,z_2)$ och $\boldsymbol{c} = (x_3,y_3,z_3)$, blir

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - & \boldsymbol{c} & - \\ - & \boldsymbol{a} & - \\ - & \boldsymbol{b} & - \end{vmatrix} = \{\text{två radbyten}\} = \begin{vmatrix} - & \boldsymbol{a} & - \\ - & \boldsymbol{b} & - \\ - & \boldsymbol{c} & - \end{vmatrix} =$$

$$\{\text{två radbyten}\} = \begin{vmatrix} - & \boldsymbol{b} & - \\ - & \boldsymbol{c} & - \\ - & \boldsymbol{a} & - \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} - & \boldsymbol{c} & - \\ - & \boldsymbol{b} & - \\ - & \boldsymbol{a} & - \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} - & \boldsymbol{b} & - \\ - & \boldsymbol{a} & - \\ - & \boldsymbol{c} & - \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} - & \boldsymbol{a} & - \\ - & \boldsymbol{c} & - \\ - & \boldsymbol{b} & - \end{vmatrix}$$

där vi gjort 1 (ett)radbyte respektive 3 radbyten och färmed fått minustecknen. "$-\boldsymbol{a}-$" betyder vektorn $\boldsymbol{a}$:s komponenter etc. Denna trippla skalära produkt skrivs också $[\boldsymbol{c}\quad\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}]$ etc.