Chalmers Tekniska Högskola

Dugga 2 för DAI1 och EI1, LMA 212, 20171012, 13.00-15.00

Lärare Reimond Emanuelsson, tel 772 5892
Ge fullständig lösning på uppgift 5 och fullständig lösning på uppgift 6 (c).

1. Beräkna determinanten av matriserna $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ och $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$, där

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g \end{bmatrix}.$$

2.0 p

2. Givet en kvadratisk matris $\boldsymbol{A}$. Ange värdet av $\det \boldsymbol{A}'$ uttryckt i $\det \boldsymbol{A}$, där matrisen $\boldsymbol{A}'$ erhålls genom radoperationen

   a) multiplikation av en rad som sedan adderas till en annan rad (R1)?
   b) radbyte (R2)?
   c) multiplikation av en rad med ett tal $c \neq 0$ (R3)? 1.5 p

3. Vilka samband gäller (d.v.s. är identiteter), för alla vektorer $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ i $\mathbb{R}^3$? Skriv S för de som är identiteter och F för de som inte är det. 2 poäng om alla svar är riktiga och 1 poäng för 1 fel.

(a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$	(b) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0$	(c) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$
(d) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$	(e) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$	(f) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

2.0 p

4. Givet fyra punkter P, Q, R och S i $\mathbb{R}^3$.
   Med vektorer uttryckta i punkterna ovan ange

   (a) arean T av triangeln med hörn i P, Q och R. 1.0 p
   (b) volymen av tetraedern med hörn i de fyra punkterna. 2.0 p

5. Beräkna trippel skalär produkt (scalar triple product) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$, där
$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = (2,0,0) \\ \boldsymbol{b} = (0,3,0) \\ \boldsymbol{c} = (0,0,4) \end{cases}.$$
2.5 p

6. Matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}$ är given.

   (a) Ange *antal* termer på formen $-1\cdot a_{1,k_1}a_{2,k_2}a_{3,k_3}a_{4,k_4}$ i $\det \boldsymbol{A}$. 1.5 p
   (b) Matrisen $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Beräkna $\det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$. 2.0 p
   (c) I $\det \boldsymbol{A}$ finns termen $(-1)^p\cdot a_{1,4}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,1}$. Avgör om p är ett udda eller jämnt heltal. Förklaring krävs! 1.5 p