Tentamen i Linjär algebra, LMA212 för DAI1 och DEI1, 20151029, 08.30-12.30

Program	DAI, EI	Kurs	LMA 212
Tentamensdatum	20151029	Tid	08.30-12.30

1.

$$z = \frac{4-5j}{9-j} = \frac{(4-5j)(9+j)}{(9-j)(9+j)} = \frac{36+5+(4-45)j}{82} = \frac{1-j}{2}, \quad |z| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+(-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}, \quad \arg z = -\frac{\pi}{4}.$$

2.0p

2. Givet matrisen $\boldsymbol{A}$...

(a) Dess determinant är

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \{\text{R1}\} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

2.0p

(b)

$$\begin{bmatrix} c & -2 & 0 \\ c & 2 & c \\ 0 & 3 & c \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2-c & 2c-2 & 2-2c \\ 2c-2 & 2-c & 2c-2 \\ 3c-3 & 3-3c & 4c-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow c = 1.$$

2.0p

(c)

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(Svar)}$$

1.5p

3. Givet matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$...

(a)

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

d.v.s. rang för koefficientmatris = 2 och rang för totalmatris = 3 och eftersom de är olika, saknas lösning.

0.5p

(b) Lösning approximativt med Minsta Kvadratmetoden:

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{b} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2.0p

4. Givet punkterna $P = (1, -3, 2)$, $Q = (-3, -6, 1)$, $R = (3, 0, 1)$ och $S = (4, 1, 1)$.

(a) Arean T av triangeln med hörn i P, Q och R är

$$T = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{|(6, -6, -6)|}{2} = 3\sqrt{3} \text{ a.e.}$$

2.0p

(b) En ekvation för planet Π med hörn i P, Q och R:

$$\boldsymbol{n} \cdot ((x, y, z) - \overrightarrow{OP}) = (1, -1, -1) \cdot ((x, y, z) - (1, -3, 2)) = x - y - z - 2 = 0\,.$$

2.0p

(c) Kalla skärningspunkten W. Linjen L_1, som går genom punkterna P och Q har ekvationen

$$(x, y, z) = s(4, 3, 1) + (1, -3, 2) = \{\text{Sätt lika med ekv för } L_2\} = (1, 1, 0)t + (5, 2, 1) \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} s = & -1 \\ t = & -8 \end{cases} \Longrightarrow W = (-3; -6; 1)(= Q).$$

2.0p

5. Betrakta binomet $f(z) = z^4 + 4$.

$$z^4 + 1 = 0 \Longleftrightarrow r^4 e^{4j\alpha} = 4 \cdot e^{j\pi(1+2n)},\ n \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \alpha = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = -1 \Longrightarrow \alpha_1 = -\pi/4 & \Longrightarrow z_1 = \sqrt{2}\, e^{-\pi/4} = 1 - j \\ n = 0 \Longrightarrow \alpha_2 = \pi/4 & \Longrightarrow z_2 = \sqrt{2}\, e^{\pi/4} = 1 + j \\ n = 1 \Longrightarrow \alpha_3 = 3\pi/4 & \Longrightarrow z_3 = \sqrt{2}\, e^{3\pi/4} = -1 + j \\ n = 2 \Longrightarrow \alpha_4 = 5\pi/4 & \Longrightarrow z_4 = \sqrt{2}\, e^{5\pi/4} = -1 - j \end{cases}$$

2.5p

6. Betrakta polynomet $g(z) = 4z^3 + 5z^2 + 14z - 15$. För ett nollställe z_0 gäller att dess imaginärdel är 2.

(a) Lös ekvationen $g(z) = 0$...

$$4(a+2j)^3 + 5(1+2j)^2 + 14(a+2j) - 15 = 4a^3 + 5a^2 - 34a - 35 + j(24a^2 + 20a - 4) = 0 \Longrightarrow$$

$$24a^2 + 20a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \text{ eller } a = 1/6.$$

Insättning i realdelen ger att $a = -1$. Detta ger två nollställen $z_{1,2} = -1 \pm 2j$.

2.5p

(b) Faktoriseringen av $f(z)$ i reella polyonom är

$$f(z) = 4z^3 + 5z^2 + 14z - 15 = (z+1+2j)(z+1-2j)(k\,z+m) = (z^2+2z+5)(4z-3)\,.$$

1.5p

7. Givet punkterna $P_1 = (3; -5; 0)$, $P_2 = (-1; -1; 7)$ och $P_3 = (4; 3; -4)$.

(a) Bilda vektorerna

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}: & = \overrightarrow{P_2P_1} = (-4, 4, 7) \\ \boldsymbol{v}: & = \overrightarrow{P_3P_1} = (1, 8, -4) \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (-4, 4, 7) \cdot (1, 8, -4) = -4 + 32 - 28 = 0.$$

som visar att sträckan mellan P_1 och P_2 är vinkelrät mot sträckan mellan P_1 och P_3. 1.5p

(b)

$$\begin{cases} |\boldsymbol{u}| & = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{81} = 9. \\ |\boldsymbol{v}| & = \sqrt{1^2 + 8^2 + (-4)^2} = \sqrt{81} = 9. \end{cases}$$

som visar att sträckan mellan P_1 och P_2 är lika lång som sträckan mellan P_1 och P_3. 1.5p

(c) Sett som ortsvektor:

$$\overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{P_1P_2} \Longleftrightarrow \text{ d.v.s. } \overrightarrow{OP_4} - \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \Longleftrightarrow$$
$$\overrightarrow{OP_4} = \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (-1, -1, 7) - (3, -5, 0) + (4, 3, -4) = (0, 7, 3).$$

(Koordinaterna för) punkten P_4 är $(0; 7; 3)$ (eller $P_4 = (0; 7; 3)$). 1.5p