Lösningsförlag till Tentamen i Linjär algebra, LMA212 för DAI1 och DEI1, 20160107, 14.00-18.00

1. Låt

$$z = \frac{2-5j}{3+7j}\cdot\frac{3-7j}{3-7j} = \frac{-29-29j}{58} = -\frac{1+j}{2} \Longrightarrow \begin{cases} |z| & = 1/\sqrt{2} \\ \operatorname{Im} z & = -1/2 \\ \arg z & = -3\pi/4 \end{cases}$$

2.0p

2. Givet matrisen $\boldsymbol{A}$...

   (a) Determinanten av $\boldsymbol{A}$ är

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

2.0p

   (b) För $a = -\dfrac{1}{2}$ och $b = 1$ är $a \cdot \begin{bmatrix} 5 & b & -3 \\ -8 & -2 & 4 \\ b & b & -b \end{bmatrix}$ inversmatris till $\boldsymbol{A}$. 2.0p

   (c) Lös matrisekvationen...

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.5p

3. (a) Visa att matrisekvationen saknar lösning $\boldsymbol{x}$...

$$[A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   med olika rang för koefficient- och totalmatris, alltså ingen lösning. 0.5p

   (b) Lös ekvationen approximativt med Minsta Kvadratmetoden...

$$\ldots \Longrightarrow \boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2.5p

   (c) Beräkna medelfelet...
   Felvektorn är (sånär som på tecken)

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = [0\ -2\,2\ -4]^T \text{ och medelfelet } \eta = \frac{|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}|}{2} = \sqrt{6}.$$

1.0p

4. Givet punkterna $P = (2;2;4)$, $Q = (2;3;1)$ och $R = (4;3;3)$.

   (a) Arean T av triangeln med hörn i P, Q och R är

$$T = \frac{|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2+(-6)^2+(-2)^2}}{2} = \sqrt{11} \text{ a.e.}$$

2.0p

   (b) En ekvation för planet Π, som innehåller punkterna P, Q och R: Normalvektor är $\boldsymbol{n} = [1\ -3\ -1]^T$.
   Planets ekvation är

$$[1\ -3\ -1]^T\cdot[x-2, y-2, z-4] - 8 - x + 3y + z = x - 3y - z + 8 = 0\,.$$

2.0p

5. Betrakta binomet $f(z) = z^2 + 2j$...

   (a) Binomiska ekvationen $f(z) = 0$.

$$z^2 = r^2e^{2j\alpha} = -2j \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 & = 2 \\ 2\alpha = -\pi/2 + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \alpha = -\pi/4 + n\pi \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

$$n = 0:\ z_1 = \sqrt{2}e^{-j\pi/4} = 1 - j,\ n = 1:\ z_2 = -1 + j$$

2.0p

   (b) $f(z) = (z + 1 - j))z - 1 + j)$ i polynom av så låg grad som möjligt. 1.0p

6. Betrakta polynomet $g(z) = (z+1)\left(z^2 - z + 1\right)$...

   (a) Lös ekvationen

$$g(z) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ z_1 = -1 z_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - 1} = \frac{1 \pm j\sqrt{3}}{2} \right.$$

2.0p

   (b) Faktorisering $g(z)$ i komplexa polynom:

$$f(z) = (z+1)(z - 1/2 - j\sqrt{3}/2)(z - 1/2 + j\sqrt{3}/2).$$

1.5p

7.

Givet punkterna $O = (0;0;0)$, $P_1 = (4;7;-4)$, $P_2 = (1;4;8)$ och $P_3 = (8;-4;1)$.

(a) Sträckorna ses om vektorer. Rätvinklighet: $\overrightarrow{OP_1} = (4,7,-4)$, $\overrightarrow{OP_2} = (1,4,8)$ och $\overrightarrow{OP_3} = (1,4,8)$ är parvis vinkelräta:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} & = 4 \cdot 1 + 7 \cdot 4 - 4 \cdot 8 = 0 \\ \overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3} & = 1 \cdot 8 + 4 \cdot (-4) + 8 \cdot 1 = 0 \\ \overrightarrow{OP_3} \cdot \overrightarrow{OP_1} & = 8 \cdot 4 - 4 \cdot 7 + 1 \cdot (-4) = 0 \end{cases}$$

Lika långa:

$$\begin{cases} |\overrightarrow{OP_1}|^2 & = 4^2 + 7^2 + (-4)^2 = 81 \\ |\overrightarrow{OP_2}|^2 & = 1^2 + 4^2 + 8^2 = 81 \\ |\overrightarrow{OP_3}| & = 1^2 + 4^2 + 8^2 = 81 \end{cases}$$

2.0p

(b) Punkterna utgör hörnen i en kub (enligt a)). Bestäm koordinaterna för kubens övriga hörn:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP_4} := \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = (5, 11, 4) \\ \overrightarrow{OP_5} := \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_5} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} = (12, 3, -3) \\ \overrightarrow{OP_6} := \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_6} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} = (9, 0, 9) \\ \overrightarrow{OP_7} := \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_4} + \overrightarrow{P_4P_7} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} = (13, 7, 5) \end{cases}$$

3.0p