Lösningsförslag till Dugga 1, 20140918, 08.00-10.00

Examinator: Reimond Emanuelsson, tel 0708 948456

1.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

(a)

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B},\, \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}\,, \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \text{ är möjliga}\,.$$

1.5p

(b)

$$\text{typ}\,(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = 3 \times 4,\ \text{typ}\,(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}) = 5 \times 2\,, \text{typ}\,(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = 5 \times 4$$

0.5p

2. (Nedanstående matriser är totalmatriser. Antal variabler är 3.) Antalet lösningar av respektive ES är

$$\text{(a)} \quad \boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \text{ en lösning}$$

$$\text{(b)} \quad \boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \text{oändligt med lösningar}$$

$$\text{(c)} \quad \boldsymbol{C} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{ noll lösningar.}$$

1.5p

3. (Givet matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}$. Utgå från att matrisekvationen är korrekt.)

   (a) $\boldsymbol{A}$ måstea vara kvadratisk, så att typ $\boldsymbol{A} = 4 \times 4$. $\boldsymbol{B}$ har två kolonner, så att typ $\boldsymbol{B} =$ typ $\boldsymbol{X} = 4 \times 2$.

   (b) $\boldsymbol{X}$ uttryckt i de andra matriserna:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})^{-1} \cdot \boldsymbol{B}\,.$$

2.0p

4. Låt $\boldsymbol{A}$ vara en matris av typ $m \times n$. Vilka påståenden är korrekta?

   (a) $\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A}$ är symmetrisk är sann, ty

$$(\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A})^T = \boldsymbol{A}^T \cdot (\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A}.$$

   (b) $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A} \Longrightarrow \boldsymbol{A}$ är kvadratisk är sann, ty sätt typ $\boldsymbol{A} = m \times n$. Eftersom $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$ och typ $\boldsymbol{A}^T = n \times m$, så är $m \times n = n \times m$, d.v.s. $m = n$.

   (c) $\boldsymbol{A}$ kvadratisk $\Longrightarrow \boldsymbol{A}$ har invers är falsk. Ex.vis $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Antag att den har invers $\boldsymbol{A}^{-1}$. Då blir $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{I}$.

1.5p

5. Vi visar att $(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T$ och utgår från $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T$.

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^T \cdot \boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1})^T = \boldsymbol{I}^T = \boldsymbol{I}\,.$$

2.0p