Chalmers Tekniska Högskola

Lösningsförslag till Dugga 2 för DAI1 och EI1, LMA 212, 20141013, 13.00-15.00

1. Matrisen $\boldsymbol{A}$ är av typ 3×3 med determinant, $\det \boldsymbol{A} = 3$.

   (a) $|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|^2 = 9$. 0.5 p

   (b) Determinanten av inversmatrisen till $\boldsymbol{A}$ är $|\boldsymbol{A}^{-1}| = \dfrac{1}{3}$ 0.5 p

   (c) $|3\boldsymbol{A}| = 3^3|\boldsymbol{A}| = 81$. 1.0 p

2. Förenkla så långt som möjligt...

   (a)
   $$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = 0\,.$$
   1.0 p

   (b)
   $$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) + 2\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} =$$
   $$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}\,.$$
   1.0 p

   (c) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) = 0$ eftersom $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. 1.0 p

3. (a) Definition av begreppet vektoriell produkt:
   För två vektorer $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ är vektorprodukten $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ den vektor
   - $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \sin\theta$, där θ är vinkeln mellan vektorerna.
   - $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{b}$, samt
   - $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, och $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ bildar ett högersystem (i den ordningen).

   1.5 p

   (b) $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$. (Vilka av följande operationer är meningsfulla?)

I	$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$	Meningsfull
II	$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$	Ej meningsfull
III	$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a})$	Meningsfull
IV	$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$	Meningsfull

   2.0 p

4. Givet fyra punkter A, B, C och D i $\mathbb{R}^3$...

   (a) Arean av triangeln med hörn i A, B och C är $\dfrac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{2}$. 1.5 p

   (b) Volymen av tetraederna med hörn i A, B, C och D är
   $$\frac{|\overline{AB} \times \overline{AC} \cdot \overline{AD}|}{6}.$$
   1.5 p

   (c) Givet att $A \neq B$. En ekvation på parameterform för linjen genom dessa punkter ges av $(x, y, z) = t\,\overline{AB} + \overline{OA}$, $t \in \mathbb{R}$. 1.0 p

   (d) Givet att A, B och C inte ligger på linje. En ekvation för planet, som innehåller dessa punkter är
   $$(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot ((x, y, z) - \overline{OA}) = 0\,.$$
   1.5 p

5. Antag att matrisen $\boldsymbol{A}$ har invers. Då är
   $$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \Rightarrow \det I = 1 = \det \boldsymbol{A} \cdot \det(\boldsymbol{A}^{-1})\,.$$
   Alltså måste båda faktorerna i HL var skilda från 0, och speciellt måste $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.
   2.0 p