**Tentamensskrivning i Matematisk Analys för MI, MeI o. DeI 06 08 25**

Kursnummer: LMA 400 01 04. Poäng: 5,0 Skrivtid: $08^{30} - 12^{30}$.

Hjälpmedel: Inga. Examinator: L. Westerlund, tel. 5883.

---

Åberopar man satser som ej ingår i kursen skall dessa härledas.

Givetvis krävs fullständiga lösningar och exakta förenklade svar!

---

1. Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^3 - x^2}{1-3x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3-\sqrt{x+8}}{x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\tan 2x}{\sin^2 x}$ (6p)

---

2. Visa att funktionen $f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{2}\ln x$ har en invers $\phi$ för alla $x$

i definitionsområdet, samt beräkna $\phi(-1)$, $\phi'(-1)$ och $\phi''(-1)$. (6p)

---

3. Funktionen $f(x) = \arcsin\dfrac{x}{2} - \arctan\dfrac{x^2}{2}$ är given.

Ange funktionens definitionsområde samt lös ekvationen $f(x) = 0$. (6p)

---

4. Konstruera grafen till funktionen $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{13}{4} + \dfrac{4}{x}}$ för $x > 0$

med angivande av asymptoter och lokala extrempunkter. (6p)

---

5. a) Lös differentialekvationen $y'' + 2y = x^2 + xe^{-x}$. Svara på reell form. (5p)

b) Ange lösningen till differentialekvationen $y' = (y-1)x\cos x$, $y(\pi) = 2$ på explicit form, samt beräkna $y(0)$. (4p)

---

6. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{6-3x}{x^4+3x^2}\,dx$ (6p)

---

7. Definiera begreppen strängt växande och strängt avtagande. (5p)

---

8. Formulera och bevisa satsen om variabelsubstitution i en obestämd integral. (6p)

---

**Tentamensskrivning i Matematisk Analys för MI, DeI och KI 07 12 18**

**(samt för MeI inskrivna 2005 eller tidigare).**

Kursnummer: LMA 400 01 04. Poäng: 7,5 hp Skrivtid: ~~$08^{30}$ - $12^{30}$~~ $14^{00}$ – $18^{00}$

Hjälpmedel: Inga. Examinator: L. Westerlund, tel. 5883.

---

Åberopar man satser som ej ingår i kursen skall dessa härledas.
Givetvis krävs fullständiga lösningar och exakta förenklade svar!

---

1. Funktionen $y(x)$ definieras implicit genom sambandet $y^3 + xy = 4$.

   Bestäm funktionens tangent och normal i den punkt där $y = 1$. (5p)

---

2. Funktionen $f(x) = 3x^2 - 3x^3 - x$ är given.

   Visa att f är omvändbar, dvs har en invers $\phi$ för alla x,

   samt beräkna $\phi(-1)$, $\phi'(-1)$ och $\phi''(-1)$. (6p)

---

3. Funktionen $f(x) = \arctan\frac{2\sqrt{x}}{3} - \arcsin\frac{2x}{3}$ är given.

   a) Ange funktionens definitionsområde. (2p)

   b) Lös ekvationen $f(x) = 0$. (4p)

---

4. Lös differentialekvationen

   a) $y'' + 2y' = 8x - 6e^{-2x}$ (5p)

   b) $(2x^2 + 9)\,y' = xy \quad , \quad y(6) = 1$ (4p)

---

5. Konstruera kurvan $f(x) = \dfrac{x^2 + 6}{\sqrt{x^2 + 1}}$ med angivande av asymptoter

   och lokala extrempunkter. (7p)

---

6. Beräkna integralen $\displaystyle\int_{3}^{\infty} \frac{6\sqrt{x} - 3}{2x^2 + 6x}\,dx$ (6p)

---

7. Formulera och bevisa satsen om partiell integration. (5p)

---

8. Visa att $\lim\limits_{h \to 0} (1 + h)^{1/h} = e$ (6p)

---

SVAR

060825

1a) $-2$ 1b) $-\frac{1}{12}$ 1c) $2$

2. .... $\Phi(-1)=1$, $\Phi'(-1)=2$, $\Phi''(-1)=-12$

3. $D_f: -2 \le x \le 2$, $0$ och $\sqrt{2}$

4. lok. minp. $(2, \frac{5}{2})$, asymp. y-axeln och $y=\frac{x}{2}$

5a) $y = A\cos x\sqrt{2} + B\sin x\sqrt{2} + \frac{x^2-1}{2} + \left(\frac{x}{3}+\frac{2}{9}\right)e^{-x}$

5b) $y = 1+e^{x\sin x + \cos x + 1}$, $y(0) = 1+e^2$

6. $2 - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \ln 2$

071218

1. Tang: $y = -\frac{x}{6}+\frac{3}{2}$, Norm: $y = 6x-17$

2. .... $\Phi(-1)=1$, $\Phi'(-1)=-\frac{1}{4}$, $\Phi''(-1)=-\frac{3}{16}$

3. $D_f: 0 \le x \le \frac{3}{2}$, $0$ och $\frac{3}{4}$

4. a) $y = (3x+B)e^{-2x} + 2x^2 - 2x + A$

4 b) $y = \frac{\sqrt[4]{2x^2+9}}{3}$

5. Asymp. $y=\pm x$. lok. maxp. $(0,6)$, lokminp. $(\pm 2, 2\sqrt{5})$

6. $\frac{\pi\sqrt{3}-\ln 2}{2}$

**Tentamensskrivning i Matematisk Analys för MI o MeI. 030312.**

# För elever inskrivna 2001 eller tidigare.

Kursnummer: LMA 014 0101 Skrivtid: $13^{30}$ - $17^{30}$.

Hjälpmedel: Inga Kursansvarig: L. Westerlund, tel. 5883.

Givetvis krävs fullständiga lösningar och exakta förenklade svar!

---

1. Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x-8}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^3+5x}}{x\sqrt{x+3}}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x^2}{\sin^2 x}$ (6p)

---

2. Funktionen $f(x) = x^3 + x$ är given.

a) Visa att f är omvändbar, dvs har en invers $\phi$, för alla x. (2p)

b) Beräkna $\phi(2)$ , $\phi'(2)$ och $\phi''(2)$. (4p)

---

3. Funktionen $f(x) = \arcsin\dfrac{x+1}{5} + \arctan\dfrac{1}{x^2+3}$ är given.

a) Ange funktionens definitionsområde. (2p)

b) Beräkna $f(2)$. (4p)

---

4. Bestäm en primitiv funktion till

a) $x^2e^{2x}$ (4p)

b) $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos x}$ (4p)

---

5. Bestäm asymptoter och lokala extrempunkter till funktionen

$f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}$ samt skissera dess graf. (6p)

---

6. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{5x-12\sqrt{x}+24}{x^2\sqrt{x}+12x\sqrt{x}}\,dx$ (6p)

---

7. Definiera begreppen a) $f(x)$ är kontinuerlig för $x = a$.

b) $f(x)$ är strängt avtagande. c) $f(x)$ är deriverbar för $x = a$. (6p)

---

8. Formulera och bevisa Medelvärdessatsen. (6p)

---

LÖSN. TILL MAT. ANALYS FÖR MI o MeI 030312. INSKR. 2001 EL. TIDIGARE.

1 a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x-8} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\cancel{\sqrt{x}-2}}{2(\sqrt{x}+2)(\cancel{\sqrt{x}-2})} = \dfrac{1}{2(2+2)} = \underline{\underline{\dfrac{1}{8}}}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^3+5}}{x\sqrt{x+3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2+5/x^3}}{\sqrt{1+3/x}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$

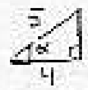
c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x^2}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} 2x^2 \underbrace{\dfrac{\tan 2x^2}{2x^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\dfrac{x^2}{\sin^2 x}}_{\to 1} \cdot \dfrac{1}{x^2} = \underline{2}$

2. a) $f(x) = x^3+x$, $f'(x) = 3x^2+1 > 0 \Rightarrow f(x)$ str. väx. $\Rightarrow$ inv. exist.

b) $f(1) = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{1 = \phi(2)}}$. $\underline{\underline{\phi'(2)}} = \dfrac{1}{f'(1)} = \underline{\underline{\dfrac{1}{4}}}$. $\underline{\underline{\phi''(2)}} = -\dfrac{f''(1)}{(f'(1))^3} = -\dfrac{6}{4^3} = \underline{\underline{-\dfrac{3}{32}}}$

3. a) $f(x) = \arcsin\dfrac{x+1}{5} + \arctan\dfrac{1}{x^2+3}$ $\underline{\underline{D_f}}$: $-1 \le \dfrac{x+1}{5} \le 1$, $\underline{\underline{-6 \le x \le 4}}$.

b) $f(2) = \underbrace{\underbrace{\arcsin\tfrac{3}{5}}_{0<\alpha<\pi/2} + \underbrace{\arctan\tfrac{1}{7}}_{0<\beta<\pi/4}}_{0<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{4}\ (*)}$ | $\sin\alpha = 3/5$



$\tan\alpha = 3/4$ | $\tan\beta = 1/7$

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}} = \dfrac{21+4}{28-3} = 1$, $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}+n\pi$ $(*) \Rightarrow n=0$

Svar $\underline{\underline{\pi/4}}$.

4 a) Ansätt $\int x^2 e^{2x}\,dx = (ax^2+bx+c)e^{2x}$

Derivera: $x^2e^{2x} = (2ax^2+\cancel{2bx}+2c+\cancel{2ax}+b)e^{2x}$, $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{4}$

Svar: $\underline{\underline{\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\right)e^{2x}}}$

b) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\,dx}{1+\cos x} = \int \frac{2\cos x\sin x\,dx}{1+\cos x} = \left\{\begin{matrix}\cos x = t\\ -\sin x\,dx = dt\end{matrix}\right\} = \int \frac{-2t\,dt}{1+t} =$

$\displaystyle = \int\left(-2+\frac{2}{1+t}\right)dt = -2t+2\ln|1+t| = \underline{\underline{-2\cos x + 2\ln(1+\cos x)}}$

5. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}$ , $D_f: x^2-9>0$ , $\underline{x<-3,\ 3<x}$.

Jämn funktion: Studera $x>0$ och spegla i y-axeln.

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-9/x^2}}\to 1=k$ då $x\to+\infty$

$f(x)-1\cdot x=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}-x=\dfrac{x^2-x\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{x^4-x^4+9x^2}{\sqrt{x^2-9}\,(x^2+x\sqrt{x^2-9})}\to 0=m$ då $x\to+\infty$

(grad N > grad T)

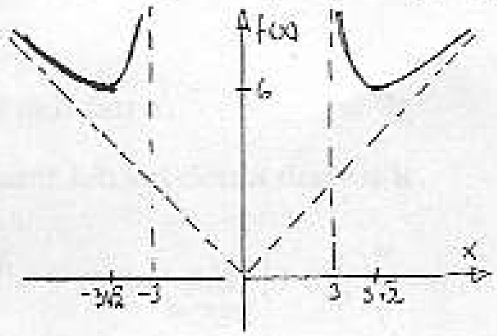
$\underline{\text{sned asymp } y=x.}$

$f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}\cdot 2x-x^2\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}}{x^2-9}=\dfrac{(x^2-9)\cdot 2x-x^3}{(x^2-9)^{3/2}}=\dfrac{x^3-18x}{(x^2-9)^{3/2}}=\dfrac{x(x^2-18)}{(x^2-9)^{3/2}}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ (då $x>0$)

$f(3\sqrt{2})=\dfrac{18}{\sqrt{18-9}}=\dfrac{18}{3}=6$

| $f'(x)$ | $-\ 0\ +$ |
|---|---|
| $x$ | $3\sqrt{2}$ |
| | min |




Svar: $\underline{D_f: x<-3,\ 3<x}$

$\underline{\text{Lok. minp: } (\pm 3\sqrt{2},\ 6).\ \text{Asymp: } y=\pm x \text{ och } x=\pm 3.}$

---

6. $\displaystyle\int_4^{\infty}\frac{5x-12\sqrt{x}+24}{x^2\sqrt{x}+12x\sqrt{x}}\,dx=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{x}=t,\ x=t^2,\ dx=2t\,dt\\ x=4\leftrightarrow t=2,\ \text{"}x=\infty\text{"}\leftrightarrow\text{"}t=\infty\text{"}\end{array}\right\}=$

$\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{5t^2-12t+24}{t^5+12t^3}\cdot 2t\,dt=\int_2^{\infty}\frac{10t^2-24t+48}{t^2(t^2+12)}\,dt$

$\dfrac{10t^2-24t+48}{t^2(t^2+12)}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{t^2}+\dfrac{Ct+D}{t^2+12}$

$10t^2-24t+48=At(t^2+12)+B(t^2+12)+(Ct+D)t^2$ $\quad\left\{\begin{array}{l}A+C=0\\ B+D=10\\ 12A=-24\\ 12B=48\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}A=-2\\ B=4\\ C=2\\ D=6.\end{array}\right.$

$\displaystyle\int_2^{\infty}\left(-\frac{2}{t}+\frac{4}{t^2}+\frac{2t+6}{t^2+12}\right)dt=\left[-2\ln t-\frac{4}{t}+\ln(t^2+12)+\frac{6}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{2\sqrt{3}}\right]_2^{\infty}$

$=\left[-\dfrac{4}{t}+\ln\left(\dfrac{t^2+12}{t^2}\right)+\sqrt{3}\arctan\dfrac{t}{2\sqrt{3}}\right]_2^{\infty}=\left[0+0+\sqrt{3}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right]-\left[-2+\ln 4+\sqrt{3}\cdot\dfrac{\pi}{6}\right]=$

$=2+\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}-2\ln 2.$