Lösningar till tentamensskrivning i Matematisk Analys för MEI, 2007-08-24.

1.

a) $\dfrac{2x^5-100x^4}{1+2x^2-x^5}=\dfrac{2-\frac{100}{x}}{\frac{1}{x^5}+\frac{2}{x^3}-1}\to 2$, då $x\to\infty$

b) $\dfrac{x^2-2x-8}{3x-4\sqrt{x+5}}=\dfrac{(x^2-2x-8)(3x+4\sqrt{x+5})}{(3x-4\sqrt{x+5})(3x+4\sqrt{x+5})}=\dfrac{(x^2-2x-8)(3x+4\sqrt{x+5})}{9x^2-16(x+5)}$

$x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{1+8}=1\pm\sqrt{9}=1\pm 3 \Rightarrow x_1=4,\ x_2=-2 \Rightarrow$

$x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$

$9x^2-16x-80=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{16}{9}x-\frac{80}{9}=0 \Leftrightarrow x=\frac{8}{9}\pm\sqrt{\frac{64}{81}+\frac{80}{9}}=\frac{8}{9}\pm\sqrt{\frac{64+720}{81}}=$

$=\dfrac{8\pm\sqrt{784}}{9}=\dfrac{8\pm 28}{9}\Rightarrow x_1=4,\ x_2=-\frac{20}{9}\Rightarrow$

$9x^2-16x-80=9(x-4)(x+\frac{20}{9})$

$\dfrac{(x^2-2x-8)(3x+4\sqrt{x+5})}{9x^2-16x-80}=\dfrac{(x-4)(x+2)(3x+4\sqrt{x+5})}{9(x-4)(x+\frac{20}{9})}=\dfrac{(x+2)(3x+4\sqrt{x+5})}{9(x+\frac{20}{9})}\to\dfrac{6(12+4\sqrt{9})}{9(4+\frac{20}{9})}=$

$=\dfrac{6\cdot 24}{9\cdot\frac{56}{9}}=\dfrac{6\cdot 24}{56}=\dfrac{6\cdot 24}{7\cdot 8}=\dfrac{18}{7}$, då $x\to 4$

(c) $\dfrac{\sin x^2}{\sin^2 x}=\dfrac{x^2\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}}{\sin^2 x}=\dfrac{\frac{\sin x^2}{x^2}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}\to 1$, då $x\to 0$

2. $f(x)=x-\arctan 2x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$ och

$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2=1-\dfrac{2}{1+4x^2}=\dfrac{1+4x^2-2}{1+4x^2}=\dfrac{4x^2-1}{1+4x^2}=4\cdot\dfrac{(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})}{1+4x^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ eller $x=\frac{1}{2}$. Då $1+4x^2>0$ för alla x, räcker det att ta med faktorerna $(x+\frac{1}{2})$ och $(x-\frac{1}{2})$ i teckenschemat för f'.

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$x+\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{1}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$

$f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}-\arctan(-1)=-\frac{1}{2}+\arctan 1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\arctan 1=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$

Från teckenschemat följer att funktionen har lokalt maximum $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ för $x=-\frac{1}{2}$ och lokalt minimum $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$ för $x=\frac{1}{2}$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ och $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Lodräta asymptoter saknas

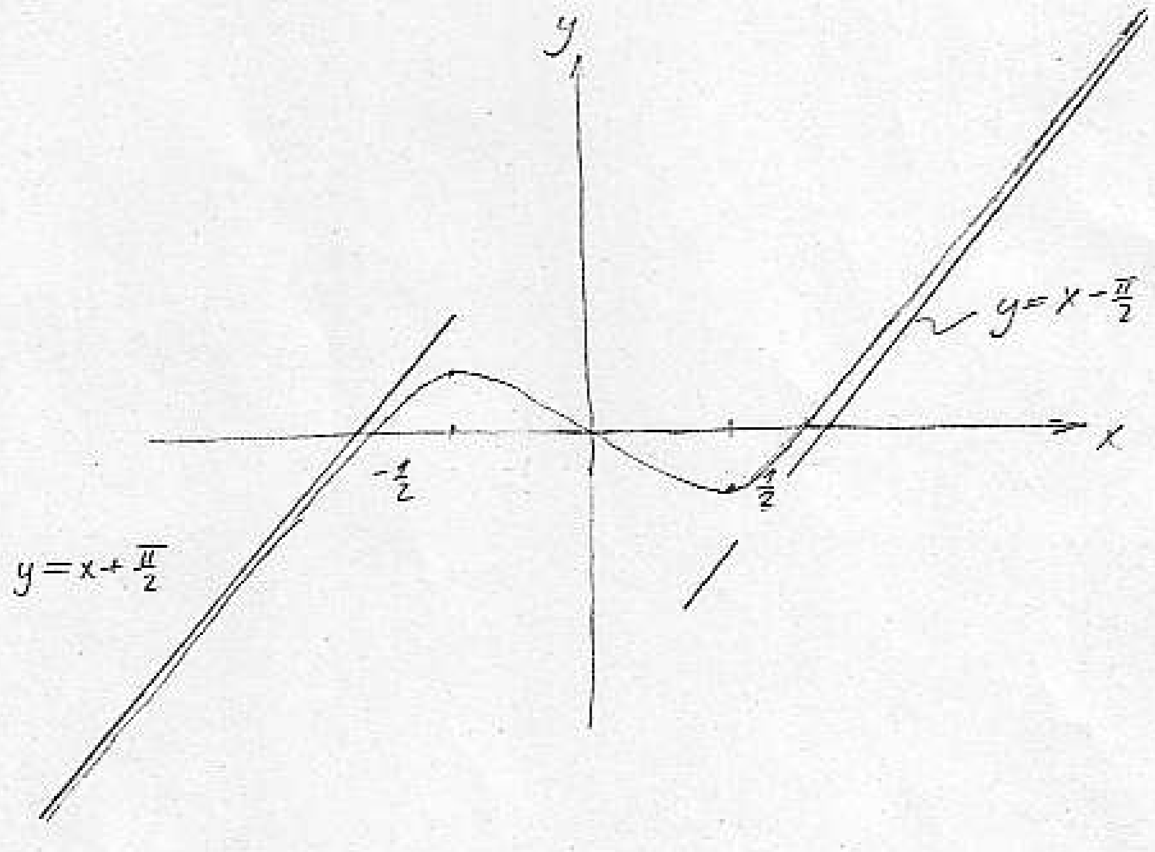
$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{\arctan 2x}{x} = 1$$

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{\arctan 2x}{x} = 1$$

$$l_1 = \lim_{x \to +\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} (x - \arctan 2x) - x = \lim_{x \to +\infty} -\arctan 2x = -\frac{\pi}{2}$$

$$l_2 = \lim_{x \to -\infty} f(x) - k_2 x = \lim_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim_{x \to -\infty} (x - \arctan 2x) - x = \lim_{x \to -\infty} -\arctan 2x = \frac{\pi}{2}$$

Sneda asymptoter är därför $y = x - \frac{\pi}{2}$ då $x \to +\infty$ och $y = x + \frac{\pi}{2}$ då $x \to -\infty$.



3. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2},$

$$f''(x) = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2 - (x^4+3x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1) - 4x(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{4x^5+4x^3+6x^3+6x-4x^5-12x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{6x-2x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

Då $f'(x) = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} \geq 0$ för alla x och $f'(x) > 0$ för alla x utom för $x = 0$, är f strängt växande och har därför en invers φ. Eftersom

$f(1) = \frac{1^3}{1^2+1} = \frac{1}{2}$, är $\varphi(\frac{1}{2}) = 1$. Vidare är

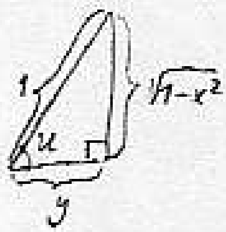
$$\varphi'(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{1^4+3\cdot 1^2}{(1^2+1)^2}} = \frac{1}{\frac{4}{2^2}} = 1$$

och

$$\varphi''(\tfrac{1}{2}) = -\frac{f''(1)}{(f'(1))^3} = -\frac{\frac{2(3-1^2)}{(1^2+1)^3}}{1} = -\frac{\frac{2\cdot 2}{2^3}}{1} = -\frac{1}{2}$$

4. $f(x) = \arctan \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin \sqrt{1-x^2}$

Vi har $\sqrt{1-x^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |x| \leq 1$, och om $|x| \leq 1$, gäller $\sqrt{1-x^2} \in [0,1]$. För att $\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \in \mathbb{R}$, måste $|x| < 1$, vilket ger $D_f = (-1,1)$. För $x \in D_f$ har vi $\sqrt{1-x^2} \in (0,1)$ och definitionen av arcsin ger att $\arcsin\sqrt{1-x^2}$ är den vinkel u, mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$, med $\sin u = \sqrt{1-x^2}$. Men då ju $\sin u > 0$, måste $u > 0$, så $0 < u < \frac{\pi}{2}$. Detta ger triangeln som ju, från Pytagoras sats ger $y^2 + 1 - x^2 = 1$, dvs $y^2 = x^2$, samt, från definitionen av tan att $\tan u = \frac{\sqrt{1-x^2}}{y}$.



Då $0 < u < \frac{\pi}{2}$ är $\tan u > 0$ så $y > 0$. Därför är $y = x$, och $\tan u = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Eftersom högerledet i ekvationen $\arctan \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ är positivt, måste vänsterledet också vara det, vilket medför att $\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} > 0$ och därmed $x > 0$. Genom att ta tangens för båda led, får vi

$$\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = \tan\left(\arctan \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \tan\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right) = \tan u = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

4. (forts) Lösningen till den givna ekvationen är därför positiva lösningar till ekvationen $\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Denna är ekvivalent med ekvationen $2x^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Lösningen till den givna ekvationen är därför $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5.

(a) Integrerande faktor är $e^{\frac{x^3}{3}}$ så lösningen är

$$y(x) = e^{-\frac{x^3}{3}}\int x^2 e^{\frac{x^3}{3}}dx + Ce^{-\frac{x^3}{3}}$$

Då $\int x^2 e^{\frac{x^3}{3}}dx = \begin{bmatrix} \frac{x^3}{3} = t \\ dt = x^2dx \end{bmatrix} = \int e^t dt = e^t = e^{\frac{x^3}{3}}$ är lösningen

$$y(x) = e^{-\frac{x^3}{3}} \cdot e^{\frac{x^3}{3}} + Ce^{-\frac{x^3}{3}} = 1 + Ce^{-\frac{x^3}{3}}$$

(b) Karaktäristiska ekvationen är $k^2 + 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow$
$k = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$ dvs rötterna är $k_1 = -1$ och $k_2 = -2$,
så den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är

$$y_h(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x}$$

Ansätt partikulärlösningen $y_p(x) = p(x)e^{-x}$, där $p(x)$ är ett polynom. Då är

$$y_p'(x) = p'(x)e^{-x} + p(x)e^{-x}(-1) = p'(x)e^{-x} - p(x)e^{-x} = (p'(x) - p(x))e^{-x}$$

$$y_p''(x) = (p''(x) - p'(x))e^{-x} + (p'(x) - p(x))e^{-x}(-1) = (p''(x) - p'(x))e^{-x} - (p'(x) - p(x))e^{-x} = (p''(x) - 2p'(x) + p(x))e^{-x}$$

Insättning i ekvationen $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = xe^{-x}$ ger

$$(p''(x) - 2p'(x) + p(x))e^{-x} + 3(p'(x) - p(x))e^{-x} + 2p(x)e^{-x} = xe^{-x} \Leftrightarrow p''(x) + p'(x) = x$$

Eftersom $p(x)$ saknas och högerledet är ett polynom av grad 1, ansätter vi $p(x) = x(ax+b) = ax^2 + bx$, vilket ger
$p'(x) = 2ax + b$, $p''(x) = 2a$
Insättning i $p''(x) + p'(x) = x$ ger
$2a + (2ax + b) = x \Leftrightarrow 2ax + (2a + b) = x \Leftrightarrow 2a = 1,\ 2a + b = 0$. Detta ger
$a = \frac{1}{2}$, $b = -2a = -1$ s.a. $p(x) = \frac{x^2}{2} - x$. Den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen är därför

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x} + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{-x}$$

6. Vi börjar med partialbråksuppdelning och undersöker först om x^2+2x+5 kan delas upp i reella förstagradsfaktorer. Vi har

$$x^2+2x+5=0 \iff x=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm\sqrt{-4}=-1\pm 2i.$$

Polynomet x^2+2x+5 kan därför inte delas upp i reella förstagradsfaktorer. Vi kvadratkompletterar i stället och får

$$x^2+2x+5=(x+1)^2+4=(x+1)^2+2^2=2^2\left(1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right).$$

Att $x^2+2x+5=4\left[1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right]$ kan vara bra vid bestämningen av primitiv funktion, men först partialbråksuppdelningen

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+5)}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+2x+5}=\frac{a(x^2+2x+5)+(x+1)(bx+c)}{(x+1)(x^2+2x+5)}=$$

$$=\frac{ax^2+2ax+5a+bx^2+cx+bx+c}{(x+1)(x^2+2x+5)}=\frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+(5a+c)}{(x+1)(x^2+2x+5)}$$

Härav följer $a+b=0$, $2a+b+c=0$, $5a+c=1$. Om vi eliminerar b ur första ekvationen och sätter in i de andra får vi $b=-a$, $a+c=0$; $5a+c=1$. Eliminerar vi c ur den första och sätter in i den andra får vi $c=-a$, $4a=1$. Därför är $a=\frac{1}{4}$, $c=-\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{4}$ så partialbråksuppdelningen blir

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+5)}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x+1}-\frac{x+1}{x^2+2x+5}\right]$$

Nu är ju $D(x^2+2x+5)=2x+2=2(x+1)$, så just denna gång behöver vi inte använda kvadratkompletteringen av nämnaren. Vi får

$$\int\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+5)}\,dx=\frac{1}{4}\left[\int\frac{1}{x+1}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)}{x^2+2x+5}\,dx\right]=\frac{1}{4}\left[\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)\right]+C$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ln|x+1|-\ln\sqrt{x^2+2x+5}\right]+C=\frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2x+5}}\right)$$

Eftersom

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2x+5}}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}=\ln 1=0$$

är

$$\int_0^\infty\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+5)}\,dx=-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{|0+1|}{\sqrt{0^2+2\cdot 0+5}}\right)=-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\ln\sqrt{5}}{4}=\frac{\ln 5}{8}$$