Lösningar till tentamensskrivning i Matematisk Analys för MEI 2008-08-27.

1

(a) $$\frac{2x^4-x^3+4}{5x^3-x^2+x^4}=\frac{2x^4-x^3+4}{x^4+5x^3-x^2}=\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^4}}{1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}\to\frac{2}{1}=2,\ \text{då } x\to\infty$$

(b) $$\frac{1}{\sqrt{4+x}}-\frac{1}{2}=\frac{2-\sqrt{4+x}}{2\sqrt{4+x}}=\frac{(2-\sqrt{4+x})(2+\sqrt{4+x})}{2\sqrt{4+x}(2+\sqrt{4+x})}=\frac{4-(4+x)}{2\sqrt{4+x}(2+\sqrt{4+x})}=-\frac{x}{2\sqrt{4+x}(2+\sqrt{4+x})}\Rightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{4+x}}-\frac{1}{2}}{x}=-\frac{1}{2\sqrt{4+x}(2+\sqrt{4+x})}\to-\frac{1}{2\sqrt{4}(2+\sqrt{4})}=-\frac{1}{2\cdot2(2+2)}=-\frac{1}{4\cdot4}=-\frac{1}{16},\ \text{då } x\to0$$

(c) $$\frac{3x}{\tan 5x}=\frac{3x}{\frac{\sin 5x}{\cos 5x}}=\frac{\frac{3x}{5x}}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{1}{\cos 5x}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{\cos x}{\frac{\sin 5x}{5x}}\to\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{5},\ \text{då } x\to0$$

2 $$f(x)=\frac{(x-1)(x^2+2)}{x^2}=(x-1)\left(1+\frac{2}{x^2}\right)=x+\frac{2}{x}-1-\frac{2}{x^2}=x+2\cdot x^{-1}-2\cdot x^{-2}-1\Rightarrow$$

$$f'(x)=1+2\cdot(-1)x^{-2}-2(-2)x^{-3}=1-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}=\frac{x^3-2x+4}{x^3}=0\iff x^3-2x+4=0$$

Man ser genast att $x=-2$ är en rot, för $(-2)^3-2(-2)+4=-8+4+4=0$

Så $x+2$ delar x^3-2x+4. Genom att utföra divisionen finner vi att

$$x^3-2x+4=(x+2)(x^2-2x+2).$$

Ekvationen $x^2-2x+2=0$ har rötterna $x=1\pm i$, dvs saknar reella rötter. Genom att kvadratkomplettera får vi

$$x^2-2x+2=(x-1)^2-1+2=(x-1)^2+1>0$$

Därför är

$$f'(x)=\frac{(x+2)[(x-1)^2+1]}{x^3}$$

med teckenschemat (eftersom $(x-1)^2+1>0$ för alla x behöver vi inte ta med denna faktor i schemat)

x		-2		0	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^3	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	odef	$+$
$f(x)$		$-\frac{9}{2}$		odef	

Från teckenschemat ser vi att f har strängt lokalt maximum $-\frac{9}{2}$ för $x=-2$, är strängt växande för $x<-2$ och $x>0$ samt strängt avtagande för $-2<x<$

② (forts) Det är klart att f är definierad för alla $x \neq 0$ och odefinierad för $x = 0$, så $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

Då $f(x) = (x-1)(1+\frac{2}{x^2}) \to -\infty$, då $x \to \pm 0$ är y-axeln lodrät asymptot och detta är enda lodräta asymptoten

Vi har

$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x} \to 1$, då $x \to \pm\infty$

så riktningskoefficienten k för en eventuell sned asymptot är 1.

Vidare är

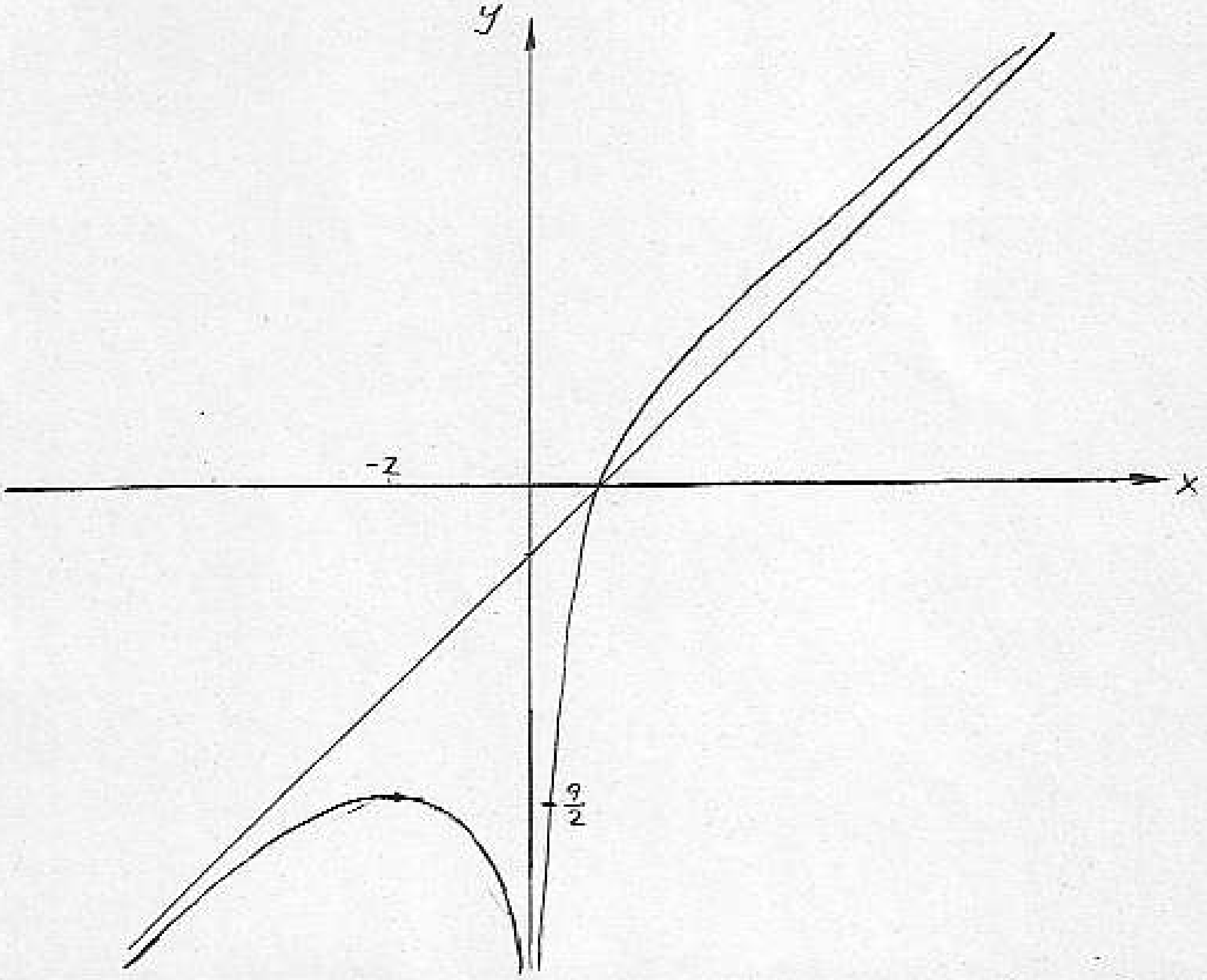
$f(x) - kx = f(x) - x = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} - 1 \to -1$, då $x \to \pm\infty$

Så $y = x - 1$ är en sned asymptot, Eftersom

$f(x) - (x-1) = f(x) - x + 1 = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$

vilket är positivt för stora positiva x och negativt för stora negativa x

Kurvan ligger därför ovanför sin asymptot, då $x \to +\infty$ och under sin asymptot, då $x \to -\infty$ Från vår samlade information är det nu enkelt att konstruera grafen, se figuren nedan.



3 $f(x)=3x^7+x^3+1 \Rightarrow f'(x)=21x^6+3x^2=3x^2(7x^4+1)\geq 0$ för alla $x\in\mathbb{R}$ och $f'(x)>0$ för alla $x\neq 0$, så f är strängt växande och har därmed en invers för alla $x\in\mathbb{R}$. Då $f(1)=3\cdot 1^7+1^3+1=3+1+1=5$, är $\phi(5)=1$. Vidare är

$$\phi'(5)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3\cdot 1^2(7\cdot 1^4+1)}=\frac{1}{3(7+1)}=\frac{1}{24}$$

Vidare är

$$f''(x)=126x^5+6x \Rightarrow f''(1)=126\cdot 1^5+6\cdot 1=126+6=132$$

så

$$\phi''(5)=-\frac{f''(1)}{[f'(1)]^3}=-\frac{132}{24^3}=-\frac{3\cdot 11\cdot 4}{24\cdot 24^2}=-\frac{11}{2\cdot 576}=-\frac{11}{1152}$$

4 Definitionsområdet för arctan t är alla reella t medan arcsin t endast är definierad för $|t|\leq 1$, så definitionsområdet för den givna funktionen är $|x|\leq\frac{1}{3}$. Då $\arctan 0=0$ och $\arcsin 0=0$ följer genast att $x=0$ är en rot till ekvationen. Eftersom f är udda följer vidare att om x är en rot, så är även $-x$ det. Då tan är strängt växande, är ekvationen $f(x)=0$, dvs $\arctan 5x=\arcsin 3x$ ekvivalent med den man får genom att ta tangens för båda led. Så ekvationen $f(x)=0$ är ekvivalent med att

$$5x=\tan(\arctan 5x)=\tan(\arcsin 3x)=\frac{\sin(\arcsin 3x)}{\cos(\arcsin 3x)}=\frac{3x}{\cos(\arcsin 3x)}$$

Vi ser här genast att $x=0$ är en lösning, vilket vi ju sedan konstaterat, och söker eventuellt andra lösningar. För $x\neq 0$ är ekvationen ovan ekvivalent med $\cos(\arcsin 3x)=\frac{3}{5}$. Genom att t.ex. kvadrera båda led (och sedan pröva rötterna till den ekvation vi då erhåller) får vi ekvationen $\cos^2(\arcsin 3x)=\frac{9}{25} \Leftrightarrow 1-\sin^2(\arcsin 3x)=\frac{9}{25}$ dvs $\sin^2(\arcsin 3x)=\frac{16}{25} \Leftrightarrow (3x)^2=\frac{16}{25} \Leftrightarrow 3x=\pm\frac{4}{5} \Leftrightarrow x=\pm\frac{4}{15}$. Nu är ju

$$\left|\pm\frac{4}{15}\right|=\frac{4}{15}<\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

så de möjliga lösningarna ligger i definitionsområdet. Från definitionen av arcsin har vi att $\arcsin\frac{4}{5}$ är den vinkel $v\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ för vilken $\sin v=\frac{4}{5}$. Då $\frac{4}{5}>0$, måste $v>0$, så $v\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Men då är $\cos v=\sqrt{1-\sin^2 v}$ så $\cos v=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$, så för $x=\frac{4}{15}$ är $\cos(\arcsin 3x)=\cos(\arcsin\frac{4}{5})=\cos v=\frac{3}{5}$ vilket visar att $x=\frac{4}{15}$ är en rot. Men som vi sedan sett är då även $x=-\frac{4}{15}$ en rot, och alla rötterna är $-\frac{4}{15}, 0, \frac{4}{15}$

⑤

(a) Ekvationen är linjär med integrerande faktor $e^{\frac{x^2}{2}}$. Då $D(e^{\frac{x^2}{2}})=e^{\frac{x^2}{2}}\cdot x$ kan lösningen skrivas

$$y(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\int 2x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}dx+Ce^{-\frac{x^2}{2}}=e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot 2e^{\frac{x^2}{2}}+Ce^{-\frac{x^2}{2}}=2+Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(b) Karaktäristiska ekvationen är

$$k^2-3k+2=0 \Leftrightarrow k=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\Leftrightarrow k_1=2,\ k_2=1$$

så den homogena differentialekvationen har den allmänna lösningen

$$y_h(x)=Ae^{2x}+Be^{+x}. \checkmark$$

Vi söker nu en partikulär lösning $y_p(x)$ till den inhomogena ekvationen. Ett sätt att göra det är att ansätta $y_p(x)=z(x)e^{-4x}$. Med

$$P(D)=D^2-3D+2=(D-2)(D-1)$$

är

$$P(D)(e^{-4x}z(x))=e^{-4x}\cdot P(D-4)z(x)=e^{-4x}(D-4-2)(D-4-1)z(x)=$$
$$=e^{-4x}(D-6)(D-5)z(x)=e^{-4x}(D^2-11D+30)z(x)$$

Så ansättningen ger ekvationen

$$z''(x)-11z'(x)+30z(x)=30x-71$$

Med $z(x)=ax+b$ får vi $z'(x)=a$ så

$$-11a+30(ax+b)=30x-71\Leftrightarrow$$
$$30ax+30b-11a=30x-71\Leftrightarrow$$
$$a=1 \text{ och } 30b-11=-71\Leftrightarrow 30b=-60\Leftrightarrow b=-2.$$

En partikulärlösning är därför

$$y_p(x)=(x-2)e^{-4x}$$

och den allmänna lösningen till den givna ekvationen är

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=Ae^{2x}+Be^{+x}+(x-2)e^{-4x}$$

6. Vi bestämmer först den obestämda integralen genom partialbråksuppdelning. Vi har

$$\frac{2x-4}{(2x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{2x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1)+(2x+1)(bx+c)}{(2x+1)(x^2+1)} = \frac{ax^2+a+2bx^2+2cx+bx+c}{(2x+1)(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(a+2b)x^2+(b+2c)x+a+c}{(2x+1)(x^2+1)}$$

Så

$a+2b=0$
$b+2c=2$
$a+c=-4$

Första ekvationen ger $a=-2b$, vilket insatt i sista ekvationen ger $-2b+c=-4 \iff -b+\frac{c}{2}=-2$. Adderar vi denna ekvation till den andra får vi $2c+\frac{c}{2}=0 \iff \frac{5}{2}c=0 \iff c=0$. Sista ekvationen ger då $a=-4$ vilket i sin tur ger $-2b=-4 \iff b=2$. Partialbråksuppdelningen blir därför

$$\frac{2x-4}{(2x+1)(x^2+1)} = -\frac{4}{2x+1} + \frac{2x}{x^2+1}.$$

Härav följer

$$\int \frac{2x-4}{(2x+1)(x^2+1)}\,dx = -2\int \frac{2}{2x+1}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = -2\ln|2x+1| + \ln|x^2+1| =$$

$$= \ln(x^2+1) - \ln(2x+1)^2 = \ln\frac{x^2+1}{(2x+1)^2} = \ln\frac{x^2+1}{4x^2+4x+1} \to \ln\frac{1}{4} = -\ln 4, \text{ då } x \to \infty$$

För $x=2$ blir uttrycket

$$\ln\frac{2^2+1}{(2\cdot 2+1)^2} = \ln\frac{5}{5^2} = \ln\frac{1}{5} = -\ln 5$$

så

$$\int_2^\infty \frac{2x-4}{(2x+1)(x^2+1)} = -\ln 4 - (-\ln 5) = \ln 5 - \ln 4 = \ln\frac{5}{4}$$