Lösningar till tentamensskrivning i Matematisk Analys för MEI, 2008-03-10.

1

(a) $\dfrac{5x^2+2x+1}{2x+x^2} = \dfrac{5x^2+2x+1}{x^2+2x} = \dfrac{5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} \to \dfrac{5}{1} = 5$, då $x \to \infty$

(b) $\sqrt{4+x}-2 = \dfrac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{\sqrt{4+x}+2} = \dfrac{(4+x)-4}{\sqrt{4+x}+2} = \dfrac{x}{\sqrt{4+x}+2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{4+x}+2} \to \dfrac{1}{4}$

då $x \to 0$

(c) $\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x} = \dfrac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\sin 3x} = \dfrac{1}{\cos 2x} \cdot \dfrac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\cos 2x}\cdot\dfrac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} \to \dfrac{2}{3}$, då $x \to$

2. $f'(x) = \dfrac{(2x+2)(x+1)-(x^2+2x+2)\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2(x+1)^2-(x^2+2x+2)}{(x+1)^2} = \dfrac{2(x^2+2x+1)-(x^2+2x+2)}{(x+1)^2} =$

$= \dfrac{2x^2+4x+2-x^2-2x-2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ eller $x=-2$.

Teckenschema

x		-2		-1		0	
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	odef	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	odef	$\searrow$	2	$\nearrow$

Från teckenschemat följer att f har strängt lokalt maximum -2 för $x=-2$, strängt lokalt minimum 2 för $x=0$, är strängt växande för $x<-2$ och $x>2$ och strängt avtagande för $-2<x<-1$ och $-1<x<0$. Klart att f är definierad för alla $x \neq -1$ och odefinierad för $x=-1$ så $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$.

Vi har $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x+2}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+2+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x+2}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+2x+2}{x+1} = \lim_{x\to -1^-}\left(2+\frac{x^2}{x+1}\right) = -\infty$$

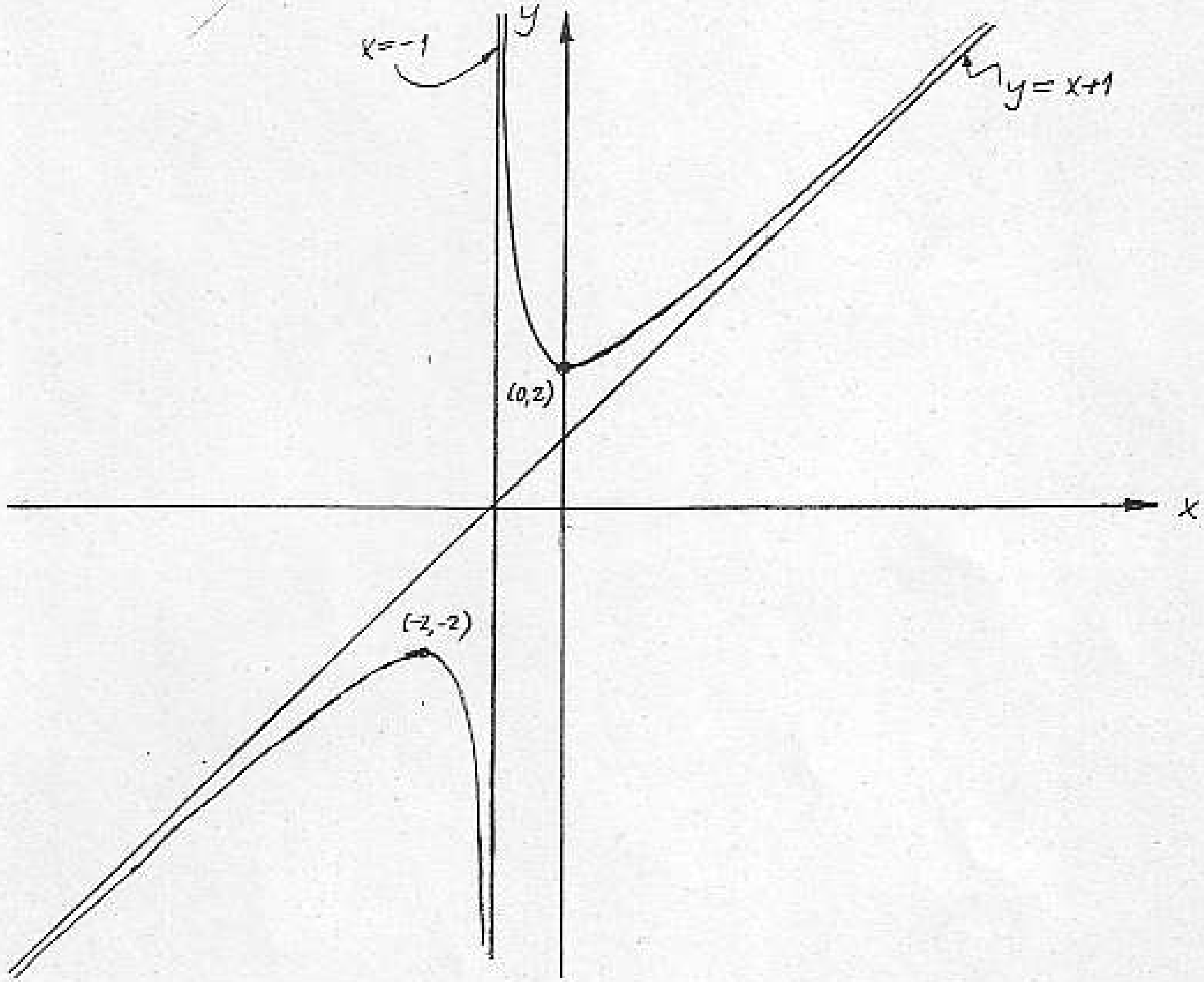
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+2x+2}{x+1} = \lim_{x\to -1^+}\left(2+\frac{x^2}{x+1}\right) = +\infty,$$

så $x=-1$ är en lodrät asymptot. Vidare är

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+2x+2}{x(x+1)} = \frac{x^2+2x+2}{x^2+x} = \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \to 1, \text{ då } x\to\pm\infty \text{ och}$$

$$f(x)-x = \frac{x^2+2x+2}{x+1} - x = \frac{x^2+2x+2-x(x+1)}{x+1} = \frac{x^2+2x+2-x^2-x}{x+1} = \frac{x+2}{x+1} = \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} \to 1,$$

då $x\to\pm\infty$, så $y=x+1$ är en sned asymptot.



(3) $f'(x)=3x^2+6x+3=3(x^2+2x+1)=3(x+1)^2\geq 0$ för alla $x\in\mathbb{R}$ (3)

och $f'(x)>0$ för $x\neq -1 \Rightarrow f$ strängt växande $\Rightarrow f$ har en inversfunktion ϕ. Då $f(1)=1+3+3-5=2$, är $\phi(2)=1$.

Vidare är $f''(x)=6(x+1)$ så

$$\phi'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3(1+1)^2}=\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{12},\quad \phi''(2)=-\frac{f''(1)}{[f'(1)]^3}=-\frac{6(1+1)}{12^3}=-\frac{12}{12^3}=-\frac{1}{144}.$$

(4)

(a) Ekvationen är linjär och med integrerande faktor $\frac{1}{x}$ och lösningen kan skrivas

$$y(x)=x^2\left[\int e^x\,dx\right]=x^2(e^x+C)=x^2e^x+Cx^2$$

(b) Karaktäristiska ekvationen är

$$k^2+3k+2=0 \Leftrightarrow k=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$k_1=-1,\ k_2=-2,$

så den homogena ekvationen har den allmänna lösningen

$$y_h(x)=Ae^{-x}+Be^{-2x}.$$

Vi söker nu en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen. Ett sätt att göra detta är att ansätta $y_p(x)=z(x)e^{-x}$.

Med $P(D)=D^2+3D+2=(D+1)(D+2)$ är

$$P(D)(e^{-x}z(x))=e^{-x}P(D-1)z(x)=e^{-x}D(D+1)z(x)=e^{-x}(D^2+D)z(x).$$

Ansättningen ger därför ekvationen

$$z''(x)+z'(x)=(x+1).$$

Med $z(x)=x(ax+b)=ax^2+bx$ får vi $z'(x)=2ax+b$, $z''(x)=2a$ s.a.

$2a+(2ax+b)=x+1 \Leftrightarrow 2a+b+2ax=x+1 \Leftrightarrow 2a=1\quad 2a+b=1$, vilket ger

$a=\frac{1}{2},\ b=1-2a=1-1=0.$

En partikulärlösning är därför

$$y_p(x)=x\left(\tfrac{1}{2}x+0\right)e^{-x}=\frac{x^2}{2}e^{-x}.$$

Den allmänna lösningen till den givna ekvationen är

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=Ae^{-x}+Be^{-2x}+\frac{x^2}{2}e^{-x}$$

(5) Se lösningar till tentamensskrivning i Matematisk Analys för MEI 2008-08-27, nr 6.

(6) Vi har

$\frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$, $\quad 0 < \frac{2}{x^2+1} \le 2$ för alla $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow -1 \le \frac{x^2-1}{x^2+1} < 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så $D_f = \mathbb{R}$. Betrakta nu ekvationen

$$\arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1} = 2 \arctan x$$

Vi ser genast att om $|x| \le 1$ är $\frac{x^2-1}{x^2+1} < 0$ så då är V.L. < 0. Om ett sådant x är en lösning, måste även H.L. < 0, vilket medför att $\arctan x \le 0$ och då måste $x \le 0$. Så om ett x med $|x| \le 1$ är en lösning, måste $x \le 0$, dvs $-1 < x \le 0$. På samma sätt ser vi att om ett x med $|x| > 1$ är en lösning, måste $x > 0$, dvs $x > 1$. Men om $x > 1$ är $2 \arctan x > \frac{\pi}{2}$, dvs H.L. $> \frac{\pi}{2}$. Men V.L. är $\arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1}$, som p.g.a. definitionen av arcsin är en vinkel mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$. Slutsatsen är därför att inget x med $|x| > 1$ kan vara någon lösning. Enda möjliga lösning x måste därför uppfylla $-1 < x \le 0$.

Sätt $\arctan x = v$. Då $-1 < x \le 0$ måste $-\frac{\pi}{4} < v < 0$ och då gäller

$\sin v = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos v = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Genom att ta sin för båda led får vi

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} = \sin\left(\arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \sin(2 \arctan x) = \sin 2v = 2 \sin v \cos v =$$

$$= 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \Longleftrightarrow x^2 - 1 = 2x \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Longleftrightarrow$$

$x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$, dvs $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ och $x_2 = 1 - \sqrt{2}$. Men $x_1 > 1$ och kan därför inte, som vi redan sett, inte vara någon lösning. För $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ gäller $-1 < x_2 < 0$, och detta är den enda lösningen till ekvationen.