

Tentamensskrivning i Matematisk Analys för MEI 2009-03-10

1. Lös ekvation resp olikhet.

a) $1 - 3x = 2\sqrt{x}$ b) $\frac{x-4}{x-1} \geq \frac{x-8}{3x+1}$ (5p)

2. Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - x + 2} - \sqrt{2x}}{x^2 - 2x}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x + 5 - \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{e^{-x}} - 1 + \frac{x}{2}}$ (8 p)

3. Konstruera grafen till funktionen $f(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$ med angivande av definitionsområde, asymptoter och lokala extrempunkter. (6p)

4. a) Funktionen $f(x)$ definieras av sambandet $e^{-2f(x)}(f(x)^2 + 1) = x$, $0 < x < \infty$. Beräkna $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$, genom att derivera sambandet en resp två gånger.

b) Bevisa att sambandet i a) verkligen definierar funktionen $f(x)$, dvs att det för varje y , $0 < y < \infty$ finns precis ett x så att $y = e^{-2x}(x^2 + 1)$. (6p)

5. Lös differentialekvationerna.

a) $\sqrt{x} y' - y = x$ (5p)

b) $y'' + 4y = xe^{-x} + 2 \cos 2x$. (5p)

6. Beräkna integralerna.

a) $\int \frac{\cos x}{4 - \cos^2 x} dx$ (5p)

b) $\int_1^\infty \frac{1}{2x^2 + 3x - 2} dx$. (5p)

7. För vilka a är de generaliserade integralerna $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}^a} dx$ resp $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}^a} dx$ konvergenta. Bevisa ditt påstående. (5p)