Lösningar till tentamensskrivning i Matematisk Analys för MEI, 2009-01-14.

1

(a) $\sqrt{4x^2+5x}-2x = \dfrac{(\sqrt{4x^2+5x}-2x)(\sqrt{4x^2+5x}+2x)}{\sqrt{4x^2+5x}+2x} = \dfrac{4x^2+5x-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+5x}+2x} = \dfrac{5x}{\sqrt{4x^2+5x}+2x} =$

$= \dfrac{5x}{2|x|\sqrt{1+\frac{5}{4x}}+2x} \Rightarrow$ för $x>0$ är $\sqrt{4x^2+5x}-2x = \dfrac{5x}{2x\sqrt{1+\frac{5}{4x}}+2x} = \dfrac{5}{2\sqrt{1+\frac{5}{4x}}+2} \to \dfrac{5}{4}$

då $x \to +\infty$.

(b) $2-\sqrt{4-x} = \dfrac{(2-\sqrt{4-x})(2+\sqrt{4-x})}{2+\sqrt{4-x}} = \dfrac{4-(4-x)}{2+\sqrt{4-x}} = \dfrac{x}{2+\sqrt{4-x}} \Rightarrow \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x} = \dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}} \to \dfrac{1}{4}$,

då $x \to 0$

(c) $\dfrac{\sin x^2}{x^4+5x^2} = \dfrac{\frac{\sin x^2}{x^2}}{\frac{x^4+5x^2}{x^2}} = \dfrac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{x^2+5} \to \dfrac{1}{5}$, då $x \to 0$

2

Då $4+x^2 \geq 4 > 0$ för alla x är $D_f = \mathbb{R}$. Vi observerar att f är udda, dvs $f(-x) = -f(x)$, så det räcker att studera f för $x \geq 0$. Vi har

$f'(x) = D\left(\dfrac{4x}{4+x^2}\right) = \dfrac{4(4+x^2)-4x\cdot 2x}{(4+x^2)^2} = \dfrac{16+4x^2-8x^2}{(4+x^2)^2} = \dfrac{16-4x^2}{(4+x^2)^2} = 4\,\dfrac{4-x^2}{(4+x^2)^2} =$

$= 4\cdot\dfrac{(2+x)(2-x)}{(4+x^2)^2}$.

För $x \geq 0$ har vi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ och att $f'(x) > 0$ för $x < 2$ och $f'(x) < 0$ för $x > 2$, så f har strängt lokalt maximum för $x = 2$. Vidare är $f(2) = \dfrac{4\cdot 2}{4+2^2} = \dfrac{8}{4+4} = 1$.

För att undersöka eventuella inflexionspunkter beräknar vi f''. Vi har

$f''(x) = 4\cdot\dfrac{-2x(4+x^2)^2-(4-x^2)\cdot 2(4+x^2)\cdot 2x}{(4+x^2)^4} = 8x\,\dfrac{-(4+x^2)-2(4-x^2)}{(4+x^2)^3} = 8x\,\dfrac{-4-x^2-8+2x^2}{(4+x^2)^3} =$

$= 8x\,\dfrac{x^2-12}{(4+x^2)^3} = 8x\,\dfrac{(x+\sqrt{12})(x-\sqrt{12})}{(4+x^2)^3}$

För $x \geq 0$ är $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $f''(x) < 0$ för $x > 0$ och nära x, $f''(x) < 0$ för $0 < x < \sqrt{12}$ och $f''(x) > 0$ för $x > \sqrt{12}$. Då f är udda följer att $(0, f(0)) = (0,0)$, $(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ inflexionspunkter.

Vidare har f strängt lokalt minimum för $x = -2$ och $f(-2) = -1$.

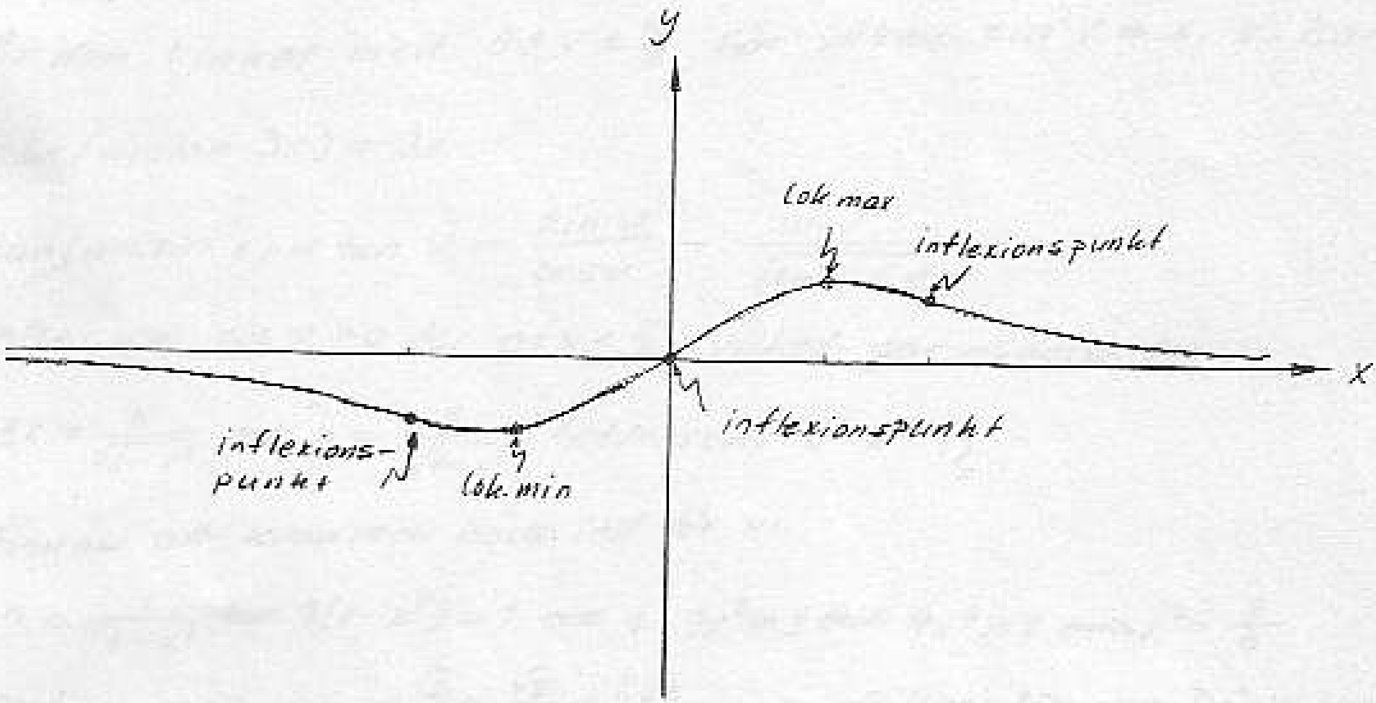
Vertikala asymptoter saknas. Vi har

$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{4+x^2} \to 0$, då $x \to \pm\infty$

och

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

så $y=0$ är asymptoter, då $x \to +\infty$ och $x \to -\infty$



3

(a) Definitionsområdet sammanfaller med det för ln, dvs

$D_f = \{x \in R \mid x > 0\}$. För alla sådana x är

$f'(x) = 2x - 4 + \frac{3}{x} = \frac{2x^2 - 4x + 3}{x} = 2\,\frac{x^2 - 2x + 3/2}{x} = 2\,\frac{(x-1)^2 - 1 + 3/2}{x} = 2\,\frac{(x-1)^2 + 1/2}{x} > 0$

för alla $x > 0$. Därför är f strängt växande för alla $x \in D_f$ och f omvändbar.

(b) Vi har, om ϕ betecknar den inversa funktionen till f

$f(1) = 1 - 4 + 5 + 3\ln 1 = 2 \Rightarrow \phi(2) = 1.$

Vidare är

$\phi'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1} = 1.$

Då

$f''(x) = D(2x - 4 + 3x^{-1}) = 2 - 1 \cdot 3 \cdot x^{-2}$

är $f''(1) = 2 - 3 = -1$ och

$\phi''(2) = -\frac{f''(1)}{[f'(1)]^3} = 1$

) Eftersom arctan är definierad för alla x, består D_f av alla de x för vilka arcsin är definierad, dvs $D_f = [-1,1]$.

Betrakta ekvationen $f(x)=0$, dvs

$\arctan 3x = \arcsin x$,

Då båda funktionerna är udda och $\arctan 3\cdot 0 = 0 = \arcsin 0$, är $x=0$ uppenbart en lösning och det räcker att undersöka lösningar i intervallet $]0,1]$. Om $v = \arcsin x$ följer, då $0<x\leq 1$ att v är den vinkel med $0<v\leq\frac{\pi}{2}$ för vilken $\sin v = x$. Vi har

$$\tan(\arctan 3x) = 3x$$

$$\tan(\arcsin x) = \tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\sin v}{\sqrt{1-\sin^2 v}}$$

eftersom $\cos v > 0$ för $0<v<\frac{\pi}{2}$, vilket ger ekvationen

$$3x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \iff 3 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{eftersom } 0<x<1)$$

Genom att kvadrera båda led får vi

$$9 = \frac{1}{1-x^2} \iff 9(1-x^2)=1 \iff 9-9x^2=1 \iff 9x^2=8 \iff x^2=\frac{8}{9}$$

Då $x>0$ är $x=\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ enda möjliga lösning. Då vi kvadrerat, måste vi pröva i den okvadrerade ekvationen, och finner att denna är uppfylld för $x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Samtliga lösningar till den ursprungliga ekvationen är därför $-\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

5

(a) Genom att dividera båda led av ekvationen med $1+x^2>0$ får vi den ekvivalenta ekvationen

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = x.$$

Med $f(x) = -\frac{x}{1+x^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx = -\frac{1}{2}\ln|1+x^2| = \ln\left[(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$

så integrerande faktor är

$$e^{F(x)} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Lösningen är därför

$$y(x) = \sqrt{1+x^2}\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + C\sqrt{1+x^2}.$$

Då $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \begin{bmatrix} 1+x^2=t \\ 2x\,dx=dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\,\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{t} = \sqrt{1+x^2}$ blir lösningen

$$y(x) = \sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+x^2} + C\sqrt{1+x^2} = 1+x^2 + C\sqrt{1+x^2}$$

(b) Karaktäristiska ekvationen är

$k^2 - k = 0 \Leftrightarrow k(k-1) = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0,\ k_2 = 1.$

Allmänna lösningen till den homogena ekvationen är därför

$y_h(x) = Ae^{0x} + Be^x = A + Be^x$

där A och B är godtyckligt valda konstanter.

Eftersom högerledet är ett polynom av andra graden och koefficienten för y i differentialekvationen är 0, ansätter vi

$y_p(x) = x(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx$

Då är

$y_p'(x) = 3ax^2+2bx+c,\ \ y_p''(x) = 6ax+2$

vilket insatt i ekvationen ger

$(6ax+2) - (3ax^2+2bx+c) = y_p''(x) - y_p'(x) = x^2 \Leftrightarrow$

$-3ax^2 + (6a-2b)x + 2 + c = x^2 \Leftrightarrow$

$-3a = 1,\ 6a-2b = 0,\ 2+c = 0$

s.a

$a = -\frac{1}{3},\ b = 3a = -1,\ c = -2.$

Partikulärlösningen blir därför

$y_p(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 - 2x$

och den allmänna lösningen till den givna ekvationen är

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A + Be^x - \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x$

⑥ En partiell integration överför problemet till att integrera en rationell funktion, som löses via partialbråksuppdelning. ⑤

Genom att först göra substitutionen $x^2 = t$, förefaller det som om räkningarna blir något enklare. Vi får då

$$\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}\,dx = \begin{bmatrix} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt$$

och

$$\int \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt = \int \underset{u'}{t^{-2}}\,\underset{v}{\ln(1+t)}\,dt = \frac{t^{-1}}{-1}\ln(1+t) - \int \frac{t^{-1}}{-1}\cdot\frac{1}{1+t}\,dt =$$

$$= -\frac{\ln(1+t)}{t} + \int \frac{1}{t(t+1)}\,dt.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} = \frac{a(t+1)+bt}{t(t+1)} = \frac{(a+b)t + a}{t(t+1)}$$

så $a+b=0$, $a=1$, dvs. $a=1$, $b=-a=-1$. Vi får alltså

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$

så

$$\int \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \ln|t| - \ln|t+1| = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|.$$

Om nu $X >$ får vi

$$\int_1^X \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} + \ln\left|\frac{x^2}{x^2+1}\right|\right]_1^X =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(1+X^2)}{X^2} + \ln\frac{X^2}{X^2+1} + \frac{\ln(1+1)}{1} - \ln\frac{1}{1+1}\right) \to \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 2) = \ln 2.$$