Uppgift 1. Skriv om följande differentialekvationer till system av första ordningen.
(a). $u'' = t + u + u'$ **(b).** $u''' = u'' + tu$ **(c).** $u''' = -uu''$

Uppgift 2. En kloss kan röra sig friktionsfritt längs en horisontell linje. Den är fäst i en icke-linjär fjäder och en stötdämpare. Om klossen släpps från vila vid $x = x_0$ så beskrivs den fortsatta rörelsen av begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} mx'' = -kx^3 - cx', 0 \le t \le T \\ x(0) = x_0, \ x'(0) = 0 \end{cases}$$

där m är klossens massa och k samt c är konstanter (specifika för fjädern och dämparen).

(a). Skriv om ekvationen som ett första ordningens system.

(b). Skriv den kod i MATLAB som behövs för att lösa problemet med `ode45` och rita upp klossens läge som funktion av tiden. Tag $m = 0.1$, $k = 0.5$, $c = 0.01$, $x_0 = 1$ och $T = 100$.

Uppgift 3. Den matematiska pendelns rörelse beskrivs av $\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{L}\sin(\varphi(t))$ med begynnelsevillkoren $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$.

Om man approximerar $\sin(\varphi)$ med φ får man en linjär ekvation $\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{L}\varphi(t)$, med oförändrade begynnelsevillkor. Lös denna analytiskt (med penna och papper) och bestäm periodlängden.

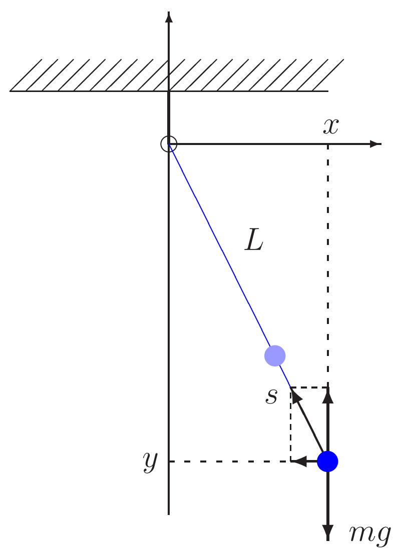
Jämför med resultatet för ursprungliga ekvationen i uppgift 5, laboration 2.

Uppgift 4. En kula med massan m hänger i ett gummiband med neutrallängden L och fjäderkonstanten k. Gummibandet är fäst i en punkt som vi väljer som origo i koordinatsystemet. Kulans rörelse i xy-planet ges av

$$\begin{cases} mx'' = -s(r)\frac{x}{r} \\ my'' = -s(r)\frac{y}{r} - mg \end{cases}$$

där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ och

$$s(r) = \begin{cases} k(r - L), & r \ge L \\ 0, & r < L \end{cases}$$



Tag $m = 0.12$ kg, $L = 0.4$ m, $k = 10$ N/m samt begynnelsevärdena $x(0) = 0.3$, $y(0) = -0.4$ för läget och $x'(0) = y'(0) = 0$ för hastigheten.

(a). Skriv om ekvationen som ett första ordningens system.

(b). Skriv den kod i MATLAB som behövs för att beskriva högerledet i ekvationen som en funktionsfil.

(c). Skriv den kod i MATLAB som behövs för att lösa problemet med `ode45` och rita upp kulans läge som funktion av tiden. Tag tidsintervallet $0 \le t \le 30$.

Uppgift 5. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u'' + u = \cos(\pi x), \ 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ u(0) = 1, \ u(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

(a). Sätt upp det linjära ekvationssystem vi får då vi i randvärdesproblemet ersätter u'' med differensapproximationer.

(b). Skriv ned den kod i MATLAB som behövs för att bygga upp matris och högerledsvektorn samt lösa det linjära ekvationssystemet och rita upp lösningen till randvärdesproblemet. Matrisen skall lagras som en gles matris med `spdiags`.

Uppgift 6. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u'' + \cos^2(x)u = x\exp(x), \ 0 < x < 1 \\ u'(0) = 1, \ u(1) = 0 \end{cases}$$

(a). Sätt upp det linjära ekvationssystem vi får då vi i randvärdesproblemet ersätter u' och u'' med differensapproximationer.

(b). Skriv ned den kod i MATLAB som behövs för att bygga upp matris och högerledsvektorn samt lösa det linjära ekvationssystemet och rita upp lösningen till randvärdesproblemet. Matrisen skall lagras som en gles matris med `spdiags`.

Uppgift 1.

(a). Låt $\begin{cases} u_1 = u \\ u_2 = u' \end{cases}$ och vi får $\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = t + u_1 + u_2 \end{cases}$

(b). Låt $\begin{cases} u_1 = u \\ u_2 = u' \\ u_3 = u'' \end{cases}$ och vi får $\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ u_3' = u_3 + tu_1 \end{cases}$

(c). Låt $\begin{cases} u_1 = u \\ u_2 = u' \\ u_3 = u'' \end{cases}$ och vi får $\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ u_3' = -u_1 u_3 \end{cases}$

Uppgift 2(a). Med $u_1 = x$, $u_2 = x'$, har vi

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -\frac{k}{m} u_1^3 - \frac{c}{m} u_2 \end{cases}$$

Med vektorbeteckningar har vi standardformen

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \end{cases} \quad \text{med } \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} u_2 \\ -\frac{k}{m} u_1^3 - \frac{c}{m} u_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} x(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b).

```
>> f=@(t,u,k,m,c)[u(2);-k/m*u(1)^3-c/m*u(2)];
>> m=0.1; k=0.5; c=0.01; x0=1; T=100;
>> tspan=linspace(0,T); u0=[x0;0];
>> [t,U]=ode45(@(t,u)f(t,u,k,m,c),tspan,u0);
>> plot(t,U(:,1))
```

Uppgift 3. Vi får $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{L}} t)$ så periodlängden blir $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$.

Uppgift 4(a). Med $u_1 = x$, $u_2 = x'$, $u_3 = y$, $u_4 = y'$, har vi

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -s(r) \frac{u_1}{m\,r} \\ u_3' = u_4 \\ u_4' = -s(r) \frac{u_3}{m\,r} - g \end{cases}$$

där $r = \sqrt{u_1^2 + u_3^2}$ och

$$s(r) = \begin{cases} k(r - L), & r \geq L \\ 0, & r < L \end{cases}$$

Med vektorbeteckningar har vi standardformen

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \end{cases}$$

med

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} u_2 \\ -s(r)\frac{u_1}{m\,r} \\ u_4 \\ -s(r)\frac{u_3}{m\,r} - g \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} x(0) \\ x'(0) \\ y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

och r och $s(r)$ som tidigare.

(b).

```
function udot=elas(t,u,k,m,L,g)
% x=u(1), x'=u(2), y=u(3), y'=u(4)
r=sqrt(u(1)^2+u(3)^2);
if r>=L
    s=k*(r-L);
else
    s=0;
end
udot=[u(2);-s*u(1)/(m*r);u(4);-s*u(3)/(m*r)-g];
```

(c).

```
>> k=10; m=0.12; L=0.4; g=9.81;
>> x0=0.3; y0=-0.4; xdot0=0; ydot0=0;
>> tspan=[0,30]; u0=[x0;xdot0;y0;ydot0];
>> [t,U]=ode45(@(t,u)elas(t,u,k,m,L,g),tspan,u0);
>> plot(U(:,1),U(:,3)), axis equal
```

Uppgift 5(a). Inför $x_i = ih, i = 0, 1, \cdots, n+1$, och $h = \frac{\pi/2}{n+1}$ samt $f(x) = \cos(\pi x)$.

$$u''(x_i) + u(x_i) = f(x_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + u_i = f(x_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$u_{i-1} + (-2 + h^2)u_i + u_{i+1} = h^2 f(x_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$$

Randvillkoret $u(0) = 1$ ger $u_0 = 1$ och $u(\pi/2) = 0$ ger $u_{n+1} = 0$.

Matrisformulering (med $c = -2 + h^2$)

$$\begin{bmatrix} c & 1 & & & \\ 1 & c & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & c & 1 \\ & & & 1 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f(x_1) - 1 \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ h^2 f(x_{n-1}) \\ h^2 f(x_n) - 0 \end{bmatrix}$$

(b).

```
>> n=30;
>> L=pi/2; f=@(x)cos(pi*x); u0=1; uL=0;
>> h=L/(n+1); xi=h*[1:n]'; e=ones(n,1);
```

```
>> A=spdiags([e (-2+h^2)*e e],[-1 0 1],n,n);
>> b=h^2*f(xi); b(1)=b(1)-u0; b(n)=b(n)-uL;
>> u=A\b;
>> x=[0;xi;L]; u=[u0;u;uL];
>> plot(x,u)
```

Uppgift 6(a). Inför $x_i = ih, i = 0, 1, \cdots, n+1$, med $h = \frac{1}{n+1}$.

$$u''(x_i) + \cos^2(x_i)u(x_i) = x_i \exp(x_i),\ \ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \cos^2(x_i)u_i = x_i \exp(x_i),\ \ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$u_{i-1} + (-2 + h^2 \cos^2(x_i))u_i + u_{i+1} = h^2 x_i \exp(x_i),\ \ i = 1, 2, \cdots, n$$

Randvillkoret $u'(0) = 1$ approximeras av $\frac{u_1 - u_0}{h} = 1$, dvs. $u_0 = u_1 - h$, och randvillkoret $u(1) = 0$ ger $u_{n+1} = 0$.

Matrisformulering med $c_1 = -1 + h^2 \cos^2(x_1)^2,\ c_i = -2 + h^2 \cos^2(x_i),\ i = 2, \cdots, n$, lyder

$$\begin{bmatrix} c_1 & 1 & & & \\ 1 & c_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & c_{n-1} & 1 \\ & & & 1 & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 x_1 \exp(x_1) + h \\ h^2 x_2 \exp(x_2) \\ \vdots \\ h^2 x_{n-1} \exp(x_{n-1}) \\ h^2 x_n \exp(x_n) - 0 \end{bmatrix}$$

(b).

```
>> n=30;
>> L=1; h=L/(n+1); xi=h*[1:n]'; e=ones(n,1);
>> A=spdiags([-e (2-h^2*cos(xi).^2) -e],[-1 0 1],n,n); A(1,1)=A(1,1)-1;
>> b=-h^2*xi.*exp(xi); b(1)=b(1)-h;
>> u=A\b;
>> x=[0;xi;L]; u=[u(1)-h;u;0];
>> plot(x,u)
```