## Linjäriserad stabilitet

Vi studerade jämvikt i autonoma system av differentialekvationer i laboration 2. Då löste vi några enkla jämviktsekvationer för hand, men nu har vi numeriska metoder till vår hjälp. Betrakta som exempel följande autonoma system av differentialekvationer

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t)), & a \le t \le b \\ \boldsymbol{u}(a) = \boldsymbol{u}_a \end{cases}$$

där

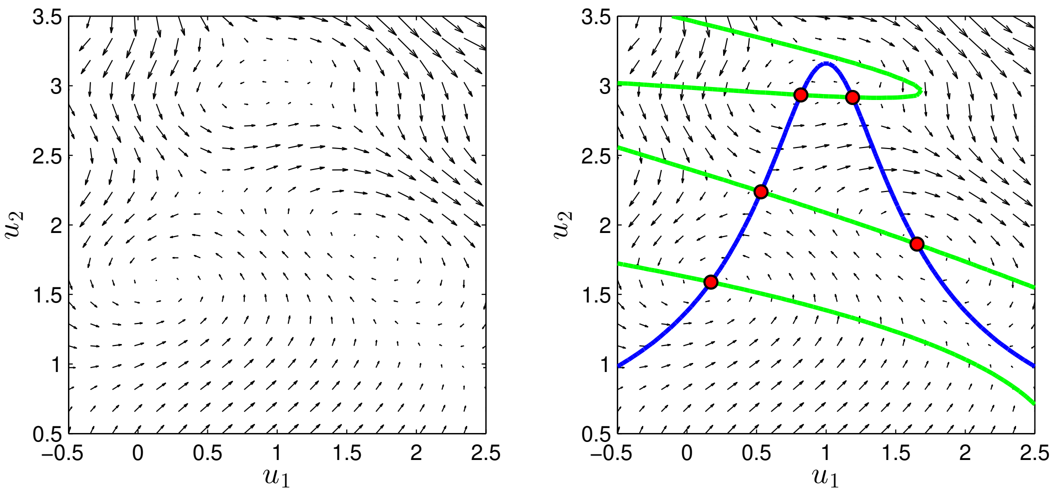
$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{u}) \\ f_2(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(0.5 + u_1 + u_2^2) + 0.2u_1u_2 \\ \cos((u_1 - 1)u_2) - 0.1u_2^2 \end{bmatrix}$$

Vi har Jacobimatrisen

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} \cos(0.5 + u_1 + u_2^2) + 0.2u_2 & 2u_2\cos(0.5 + u_1 + u_2^2) + 0.2u_1 \\ -u_2\sin((u_1 - 1)u_2) & -(u_1 - 1)\sin((u_1 - 1)u_2) - 0.2u_2 \end{bmatrix}$$

som vi skall använda för att linjärisera differentialekvationen.

Vi börjar med att rita riktningsfält och noll-nivåkurvor till $f_1$ (grön) och $f_2$ (blå). Med `fsolve` löser vi jämviktsekvationen $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ och jämviktspunkterna $\boldsymbol{u}_e$ markerar vi med röda prickar.




Av vilken typ är jämviktspunkterna? Givetvis kan vi svara på frågan genom att lösa differentialekvationen upprepade gånger för lämpligt valda begynnelsevillkor eller studera bilden av fältet. Men vi skall se att vi även kan linjärisera differentialekvationen runt de olika jämviktspunkterna och se på egenvärdena till de linjära systemen för att få svaret.

Taylorutveckling runt $\boldsymbol{u}_e$ ger

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_e + \boldsymbol{w}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_e) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{u}_e)\boldsymbol{w}$$

Låter vi $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_e + \boldsymbol{w}(t)$ får vi en linjärisering runt en jämviktspunkt $\boldsymbol{u}_e$

$$\boldsymbol{w}'(t) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_e) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{u}_e)\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{u}_e)\boldsymbol{w}(t)$$

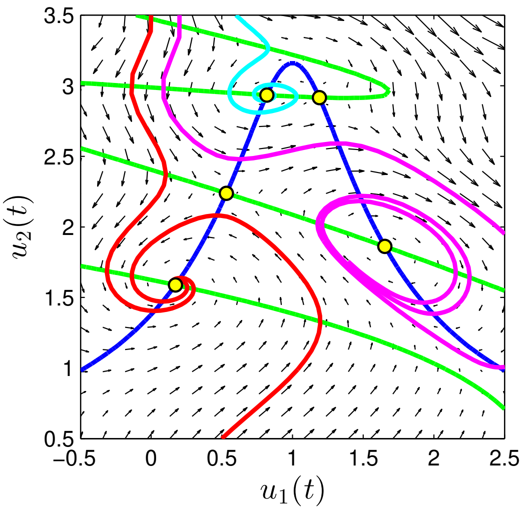
eftersom $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_e) = \boldsymbol{0}$. Vi betraktar det linjära systemet

$$\boldsymbol{w}'(t) = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{u}_e)\boldsymbol{w}(t)$$

I en jämviktspunkt $\boldsymbol{u}_e$ beräknar vi egenvärdena till $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{u}_e)$ för att avgöra typen av jämviktspunkt. Vi samlar i en tabell.

| Jämviktspunkt $\boldsymbol{u}_e$ | Egenvärden till $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{u}_e)$ | Typ av jämviktspunkt |
|---|---|---|
| $(0.1720, 1.5888)$ | $-0.8999 \pm 2.1856i$ | Spiral sänka |
| $(0.5326, 2.2383)$ | $3.4325,\ -2.8658$ | Sadel |
| $(0.8180, 2.9338)$ | $-0.4850 \pm 2.7213i$ | Spiral sänka |
| $(1.1902, 2.9158)$ | $2.0708,\ -2.8908$ | Sadel |
| $(1.6536, 1.8618)$ | $0.0875 \pm 2.1332i$ | Spiral källa |

Vi ritar in några lösningar i riktningsfältet.




I riktningsfälten ser vi jämviktspunkterna som gula prickar. Vi lät även noll-nivåkurvorna till $f_1$ (grön) och $f_2$ (blå) vara kvar, p.g.a. deras geometriska betydelse (vilken?). Vi har ritat några olika lösningskurvor, röda och cyan in mot spiral sänkorna, magenta mot den stabila *gränscykel*. De två sadelpunkterna samt spiral källan ser vi, men har inte ritat några lösningskurvor nära dem (gör det gärna själv).