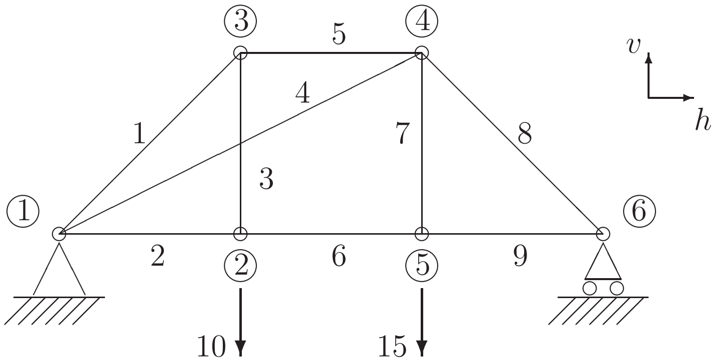
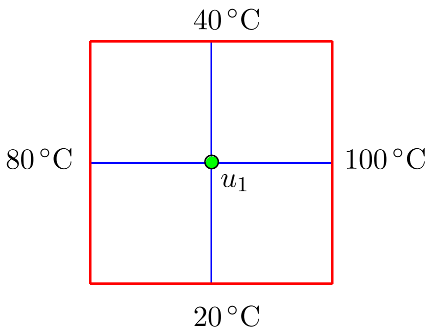
Uppgift 1. Krafterna i de olika grenarna av fackverket i figuren skall bestämmas då angivna yttre krafter är anbringade.



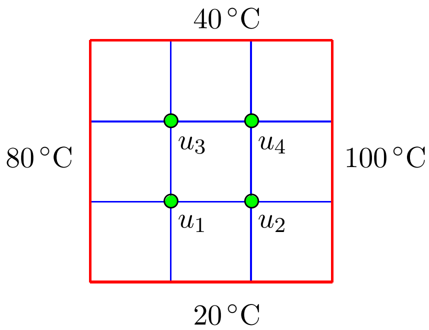
Genom att ansätta kraftjämvikt i horisontal- och vertikalled i knutpunkterna får vi ett linjärt ekvationssystem för de sökta krafterna i fackverkets grenar. Skriv upp det linjära ekvationssystemet och bestäm krafterna i de olika grenarna genom att lösa ekvationssystemet med MATLAB. Använd `sparse` och betrakta gleshetsstrukturen med `spy`.

Uppgift 2. Värmeledning i plattan - detta är samma uppgift som på laboration 3, men vi löser uppgiften i fler steg. Vi antar att temperaturen i en gitterpunkt är medelvärdet av temperaturena i de närmsta gitterpunkterna i *väster*, *öster*, *söder* och *norr*.

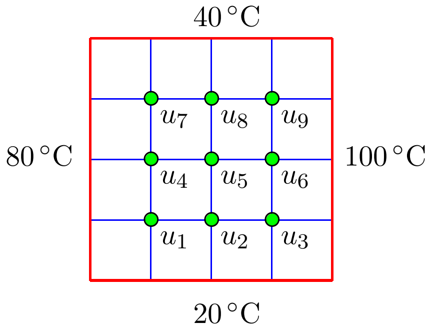
Vi lägger ett gitter (grid) över området med $n = 1$ punkter horisontellt respektive vertikalt och betecknar temperaturen i gitterpunkten med u_1. Sätt upp den ekvation som bestämmer temperaturen.



Nu lägger vi ett gitter med $n = 2$ punkter horisontellt respektive vertikalt och betecknar temperaturerna i gitterpunkterna enligt figuren. Sätt upp ekvationerna som bestämmer temperaturen i gitterpunkterna.



Slutligen lägger vi ett gitter med $n = 3$ punkter horisontellt respektive vertikalt och betecknar temperaturerna i gitterpunkterna enligt figuren. Sätt upp ekvationerna som bestämmer temperaturen i gitterpunkterna.



När du klar med övningen kan du jämföra ditt resultat för $n = 3$ med följande:

$$\left\{\begin{aligned}
u_1 &= \tfrac{1}{4}(80 + u_2 + 20 + u_4)\\
u_2 &= \tfrac{1}{4}(u_1 + u_3 + 20 + u_5)\\
u_3 &= \tfrac{1}{4}(u_2 + 100 + 20 + u_6)\\
u_4 &= \tfrac{1}{4}(80 + u_5 + u_1 + u_7)\\
u_5 &= \tfrac{1}{4}(u_4 + u_6 + u_2 + u_8)\\
u_6 &= \tfrac{1}{4}(u_5 + 100 + u_3 + u_9)\\
u_7 &= \tfrac{1}{4}(80 + u_8 + u_4 + 40)\\
u_8 &= \tfrac{1}{4}(u_7 + u_9 + u_5 + 40)\\
u_9 &= \tfrac{1}{4}(u_8 + 100 + u_6 + 40)
\end{aligned}\right.
\quad\Leftrightarrow\quad
\left\{\begin{aligned}
&4\,u_1 - u_2 - u_4 = 20 + 80\\
&4\,u_2 - u_1 - u_3 - u_5 = 20\\
&4\,u_3 - u_2 - u_6 = 20 + 100\\
&4\,u_4 - u_1 - u_5 - u_7 = 80\\
&4\,u_5 - u_2 - u_4 - u_6 - u_8 = 0\\
&4\,u_6 - u_3 - u_5 - u_9 = 100\\
&4\,u_7 - u_4 - u_8 = 40 + 80\\
&4\,u_8 - u_5 - u_7 - u_9 = 40\\
&4\,u_9 - u_6 - u_8 = 40 + 100
\end{aligned}\right.$$

Vi skriver på matrisform $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{b}$ enligt

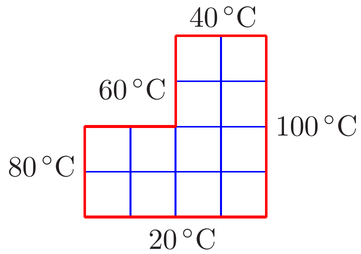
$$\begin{bmatrix}
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\\ u_6\\ u_7\\ u_8\\ u_9 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 20 + 80\\ 20 + 0\\ 20 + 100\\ 0 + 80\\ 0 + 0\\ 0 + 100\\ 40 + 80\\ 40 + 0\\ 40 + 100 \end{bmatrix}$$

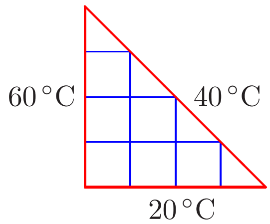
Vi ser en blockstruktur:

$$\left[\begin{matrix}
\begin{matrix} 4 & -1 & 0\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4 \end{matrix} &
\begin{matrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} &
\begin{matrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\\[2ex]
\begin{matrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} &
\begin{matrix} 4 & -1 & 0\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4 \end{matrix} &
\begin{matrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\\[2ex]
\begin{matrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} &
\begin{matrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} &
\begin{matrix} 4 & -1 & 0\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4 \end{matrix}
\end{matrix}\right]
\left[\begin{matrix}
\begin{matrix} u_1\\ u_2\\ u_3 \end{matrix}\\[2ex]
\begin{matrix} u_4\\ u_5\\ u_6 \end{matrix}\\[2ex]
\begin{matrix} u_7\\ u_8\\ u_9 \end{matrix}
\end{matrix}\right]
=
\left[\begin{matrix}
\begin{matrix} 20\\ 20\\ 20 \end{matrix} + \begin{matrix} 80\\ 0\\ 100 \end{matrix}\\[2ex]
\begin{matrix} 0\\ 0\\ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} 80\\ 0\\ 100 \end{matrix}\\[2ex]
\begin{matrix} 40\\ 40\\ 40 \end{matrix} + \begin{matrix} 80\\ 0\\ 100 \end{matrix}
\end{matrix}\right]$$

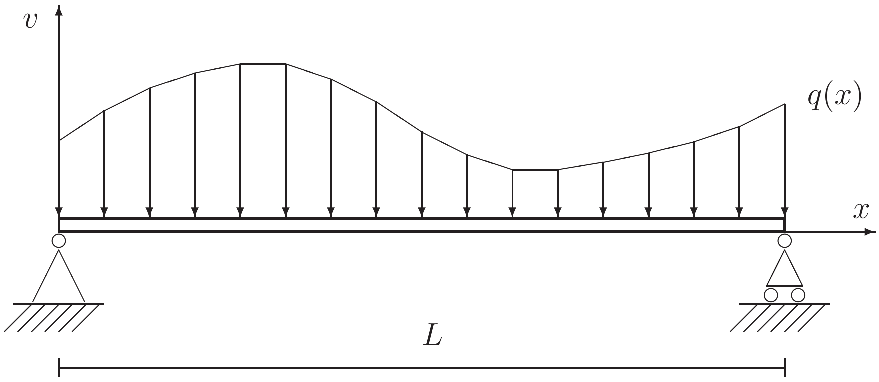
Vilken blockstruktur hade vi då $n = 2$?

Uppgift 3. Sätt upp motsvarande ekvationer för L-formade och trangulära plattorna nedan. Gitter och randtemperaturerna enligt figurerna. Numrera gitterpunkter på lämpligt sätt.





Uppgift 4. En rak balk av längd L, med variabelt yttröghetsmoment $I(x)$ och elasticitetsmodul E, ligger på två stöd och påverkas av ett tryck $q(x)$.

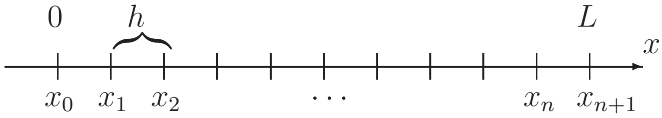


Moment $M(x)$ och utböjning $v(x)$ uppfyller följande randvärdesproblem för andra ordningens differentialekvationer över intervallet $0 \leq x \leq L$.

$$\begin{cases} -M''(x) = q(x) \\ -EI(x)\,v''(x) = M(x) \\ M(0) = M(L) = 0 \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases}$$

Vi vill bestämma $M(x)$ och $v(x)$.

Låt $x_i = ih$, $i = 0, 1, \cdots, n+1$ med $h = \frac{L}{n+1}$ vara en indelning av intervallet $0 \leq x \leq L$. Beteckna approximationer av $M(x)$ och $v(x)$ i indelningningspunkterna med M_i respektive v_i.



Sätt upp ekvationer för dessa approximationer genom att ersätta $M''(x)$ och $v''(x)$ med central-differenskvoter i indelningspunkterna. Skriv på matrisform.

Bestäm utböjningen $v(x)$ för $E = 2 \times 10^{11}$ [N/m^2], $L = 1$ [m] , $q(x) = (10 - 9x) \cdot 500$ [N/m] och $I(x) = (2 - x) \cdot 10^{-7}$ [m^4]. Använd `spdiags` i MATLAB. Tag $n = 30$.

Uppgift 5. Strålningsintensiteten I hos en blandning av två radioaktiva ämnen avtar med tiden enligt

$$I(t) = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} + B_0 \mathrm{e}^{-\mu t}$$

Man känner halveringstiderna för ämnena och därav vet man att $\lambda = 0.29$ och $\mu = 0.17$. Genom mätningar har följande data erhållits

t	1	2	3	4	5	6
I	8.01	6.18	4.71	3.68	2.86	2.20

Bestäm halterna A_0 och B_0 av ämnena i blandningen med minstakvadratmetoden.

Uppgift 6. För bestämning av fjäderkonstanten k för en fjäder gjordes ett försök, där fjädern belastades med en kraft F och dess längd l mättes. Vid försöket fick man följande mätdata

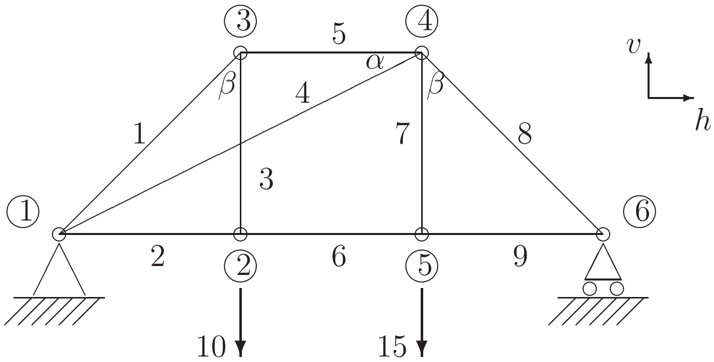
F	1	2	3	4	5
l	7.97	10.2	14.2	16.0	21.2

Hookes lag säger att fjäderns längd beror linjärt på den kraft som belastar fjädern enligt

$$l = e + \frac{F}{k}$$

där e är fjäderns längd då den är obelastad. Bestäm k med minstakvadratmetoden.

Uppgift 1.



Vi har $\alpha = \arctan(\frac{1}{2})$ och $\beta = \frac{\pi}{4}$. Låter vi $\boldsymbol{x}$ vara vektorn med de sökta krafterna får vi ekvationerna

$$\begin{aligned} -x_2 + x_6 &= 0 \quad \text{h knut 2} & -\sin(\beta)x_1 + x_5 &= 0 \quad \text{h knut 3} \\ x_3 - 10 &= 0 \quad \text{v knut 2} & -\cos(\beta)x_1 - x_3 &= 0 \quad \text{v knut 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\cos(\alpha)x_4 - x_5 + \sin(\beta)x_8 &= 0 \quad \text{h knut 4} & -x_6 + x_9 &= 0 \quad \text{h knut 5} \\ -\sin(\alpha)x_4 - x_7 - \cos(\beta)x_8 &= 0 \quad \text{v knut 4} & x_7 - 15 &= 0 \quad \text{v knut 5} \end{aligned}$$

$$-\sin(\beta)x_8 - x_9 = 0 \quad \text{h knut 6}$$

eller $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ där $\quad (u = \sin(\beta) = \cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}})$

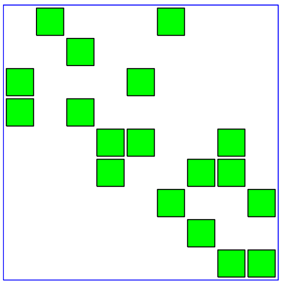
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & -1 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & 0 & 0 & -1 & -u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

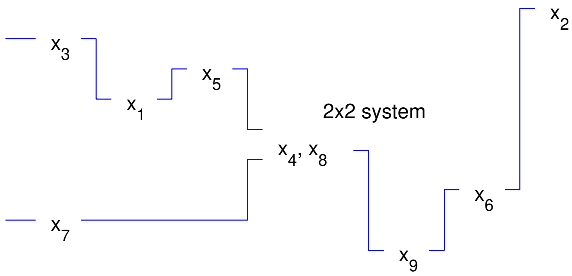
Vi matar in de nollskilda elementen med motsvarande rad- och kolonnindex och löser det linjära ekvationssystemet enligt

```
>> u=1/sqrt(2); alpha=atan(1/2);
>> rad=[1 1 2 3 3 4 4 5 5 5 6 6 6 7 7 8 9 9];
>> kol=[2 6 3 1 5 1 3 4 5 8 4 7 8 6 9 7 8 9];
>> ele=[-1 1 1 -u 1 -u -1 -cos(alpha) -1 u -sin(alpha) -1 -u -1 1 1 -u -1];
>> A=sparse(rad,kol,ele);
>> b=[0 10 0 0 0 0 0 15 0]';
```

```
>> x=A\b
x =
   -14.1421
    13.3333
    10.0000
    -3.7268
   -10.0000
    13.3333
    15.0000
   -18.8562
    13.3333
```

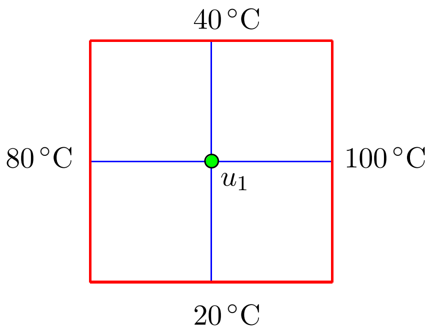
Följande figur visar beroendet mellan de obekanta. Vi ser att vi enkelt kan nysta upp lösningen så när som på ett 2×2-system som måste lösas.





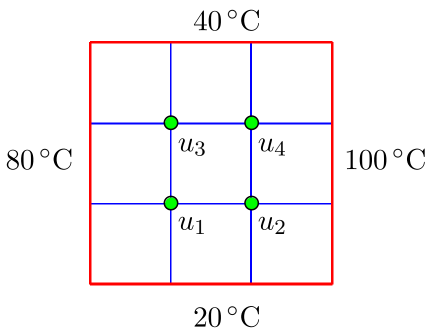
Metoderna för lösning av glesa ekvationssystem i MATLAB utnyttjar grafteori för att effektivt lösa upp beroendet mellan variablerna.

Uppgift 2. För $n = 1$ får vi $n^2 = 1$ obekanta.



$$u_1 = \frac{80 + 100 + 20 + 40}{4} = 60$$

För $n = 2$ får vi $n^2 = 4$ obekanta.



$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4}(80 + u_2 + 20 + u_3) \\ u_2 = \frac{1}{4}(u_1 + 100 + 20 + u_4) \\ u_3 = \frac{1}{4}(80 + u_4 + u_1 + 40) \\ u_4 = \frac{1}{4}(u_3 + 100 + u_2 + 40) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\,u_1 - u_2 - u_3 = 20 + 80 \\ 4\,u_2 - u_1 - u_4 = 20 + 100 \\ 4\,u_3 - u_1 - u_4 = 40 + 80 \\ 4\,u_4 - u_2 - u_3 = 40 + 100 \end{cases}$$

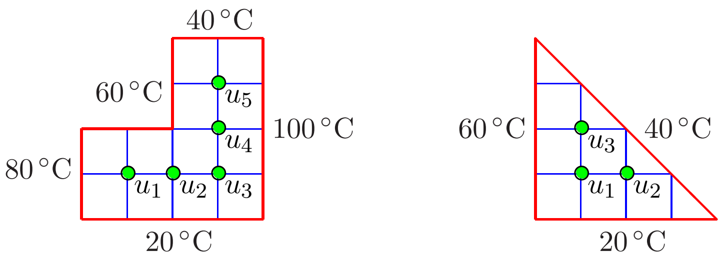
Vi skriver på matrisform $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{b}$ enligt

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 + 80 \\ 20 + 100 \\ 40 + 80 \\ 40 + 100 \end{bmatrix}$$

Vi ser en blockstruktur:

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \\ & \\ \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \\ \\ \begin{matrix} u_3 \\ u_4 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 20 \\ 20 \end{matrix} + \begin{matrix} 80 \\ 100 \end{matrix} \\ \\ \begin{matrix} 40 \\ 40 \end{matrix} + \begin{matrix} 80 \\ 100 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Uppgift 3.



$$\begin{cases} 4\,u_1 - u_2 = 20 + 80 + 60 \\ 4\,u_2 - u_1 - u_3 = 20 + 60 \\ 4\,u_3 - u_2 - u_4 = 20 + 100 \\ 4\,u_4 - u_3 - u_5 = 60 + 100 \\ 4\,u_5 - u_4 = 60 + 100 + 40 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\,u_1 - u_2 - u_3 = 20 + 60 \\ 4\,u_2 - u_1 = 20 + 40 + 40 \\ 4\,u_3 - u_1 = 60 + 40 + 40 \end{cases}$$

Uppgift 4. Med en likformig indelning och approximationerna

$$M''(x) \approx D_+D_-M(x) = \frac{M(x+h) - 2M(x) + M(x-h)}{h^2}$$

och

$$v''(x) \approx D_+D_-v(x) = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2}$$

får vi följande ekvationer

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}\{M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1}\} = q(x_i) \\ -E\,I(x_i)\frac{1}{h^2}\{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}\} = M_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

samt randvillkoren

$$\begin{cases} M_0 = M_{n+1} = 0 \\ v_0 = v_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Med matriser kan detta skrivas

$$\begin{cases} \boldsymbol{AM} = \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{Av} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{M}) \end{cases}$$

där

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{q} = h^2 \begin{bmatrix} q(x_1) \\ q(x_2) \\ \vdots \\ q(x_{n-1}) \\ q(x_n) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{r}(\boldsymbol{M}) = h^2 \begin{bmatrix} \frac{M_1}{E\,I(x_1)} \\ \frac{M_2}{E\,I(x_2)} \\ \vdots \\ \frac{M_{n-1}}{E\,I(x_{n-1})} \\ \frac{M_n}{E\,I(x_n)} \end{bmatrix}$$

Matrisen $\boldsymbol{A}$ är symmetrisk och positivt definit ($\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax} > 0,\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$). För att effektiv lösa problemet kan vi alltså Choleski-faktorisera $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$ med $\sim n$ räkneoperationer. Vi löser först $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{z} = \boldsymbol{q}$ och $\boldsymbol{CM} = \boldsymbol{z}$, därefter löser vi $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{M})$ och $\boldsymbol{Cv} = \boldsymbol{w}$.

Vi löser med MATLAB enligt

```
>> n=30;
>> L=1; E=2e11; I=@(x)(2-x)*1e-7; q=@(x)(10-9*x)*500;
>> h=L/(n+1); xi=h*[1:n]'; e=ones(n,1);
>> A=spdiags([-e 2*e -e],[-1 0 1],n,n);
>> C=chol(A);
>> qv=h^2*q(xi);
>> M=C\(C'\qv);
>> r=h^2*M./(E*I(xi));
>> v=C\(C'\r);
>> x=[0;xi;L]; V=[0;v;0];
>> plot(x,V), hold on
```

Uppgift 5. Vi får ett överbestämt linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} A_0\mathrm{e}^{-\lambda t_1} + B_0\mathrm{e}^{-\mu t_1} = I_1 \\ A_0\mathrm{e}^{-\lambda t_2} + B_0\mathrm{e}^{-\mu t_2} = I_2 \\ \vdots \end{cases}$$

Lösning med MATLAB

```
>> t=[1 2 3 4 5 6]';
>> y=[8.01 6.18 4.71 3.68 2.86 2.20]';
>> lambda=0.29; mu=0.17;
>> A=[exp(-lambda*t) exp(-mu*t)];
>> x=A\y;
>> A0=x(1), B0=x(2)
```

```
A0 =
    8.4199
B0 =
    2.0301
>> ym=@(t)A0*exp(-lambda*t)+B0*exp(-mu*t);
>> tm=linspace(t(1),t(end),100);
>> plot(t,y,'*',tm,ym(tm))
```

Uppgift 6. Vi får ett överbestämt linjärt ekvationssystem

$$e + \frac{F_i}{k} = l_i \quad i = 1, \cdots, 5$$

Lösning med MATLAB

```
>> F=[1 2 3 4 5]'; l=[7.97 10.2 14.2 16.0 21.2]';
>> A=[ones(size(F)) F];
>> x=A\l;
>> e=x(1)
e =
    4.2360
>> k=1/x(2)
k =
    0.3100
```