Uppgift 1. Betrakta egenvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u'' + u = \lambda u, \ 0 < x < L \\ u'(0) = 0, \ u(L) = 0 \end{cases}$$

(a). Gör en indelning av intervallet i n likformiga delintervall. Skriv ned det egenvärdesproblem för matris vi får då vi i problemet ersätter derivator med differensapproximationer. Vi vill se matrisen.

(b). Skriv ned den kod i MATLAB som behövs för att bygga upp matrisen samt lösa egenvärdesproblemet, komplettera lösningen med randvärden och rita upp. Matrisen skall lagras som en gles matris med `spdiags`. Vi skall beräkna de fem lösningarna med egenvärden närmast noll. Tag $L = 1$. Använd `eigs` för lösning av egenvärdesproblemet och `subplot` vid uppritning.

Uppgift 2. Betrakta egenvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, \ 0 < x < L \\ u(0) = 0, \ u'(L) + u(L) = 0 \end{cases}$$

Gör en indelning av intervallet i n likformiga delintervall. Skriv ned det egenvärdesproblem för matris vi får då vi i problemet ersätter derivator med differensapproximationer.

Uppgift 3. Visa att om $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ så gäller följande samband mellan de olika matriserna och deras egenvärdena.

Matris	$\alpha \boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A} - \mu \boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{A}^{-1}$	$(\boldsymbol{A} - \mu \boldsymbol{I})^{-1}$
Egenvärde	$\alpha\lambda$	$\lambda - \mu$	λ^{-1}	$(\lambda - \mu)^{-1}$

Dessa samband används bl.a. i samband med inversiteration.

Uppgift 4. Betrakta följande linjära system av ODE

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}, \ t > 0 \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \end{cases}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a). Lös problemet analytiskt med egenvärdesmetoden. Dvs. räkna fram en formel för lösningen med penna och papper.

(b). Formulera Euler framåtmetoden för problemet. Tag ett steg med Euler framåtmetoden utgående från begynnelsevärdet. Använd steglängden $h = 0.1$. Redovisa beräkningarna.

Uppgift 1(a). Inför $x_i = ih, i = 0, 1, \cdots, n+1$, med $h = \frac{L}{n+1}$.

$$-u''(x_i) + u(x_i) = \lambda u(x_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + u_i = \lambda u_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$-u_{i-1} + (2 + h^2)u_i - u_{i+1} = h^2 \lambda u_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

Randvillkoret $u'(0) = 0$ ger $\frac{u_1 - u_0}{h} = 0$ dvs. $u_0 = u_1$ och $u(L) = 0$ ger $u_{n+1} = 0$.

Matrisformulering med $c_1 = 1 + h^2$ och $c_i = 2 + h^2, i = 2, \cdots, n$, lyder

$$\begin{bmatrix} c_1 & -1 & & & \\ -1 & c_2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & c_{n-1} & -1 \\ & & & -1 & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = h^2 \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}$$

(b).

```
>> n=50;
>> L=1; k=5; h=L/(n+1); x=h*[0:n+1]'; e=ones(n,1);
>> A=spdiags([-e (2+h^2)*e -e],[-1 0 1],n,n); A(1,1)=A(1,1)-1;
>> [V,D]=eigs(A,k,'SM');
>> d=diag(D); [d,iord]=sort(d); V=V(:,iord);
>> V=[V(1,:);V;zeros(1,k)]; lambda=d/h^2;
>> subplot(5,1,1), plot(x,V(:,1))
>> subplot(5,1,2), plot(x,V(:,2))
>> subplot(5,1,3), plot(x,V(:,3))
>> subplot(5,1,4), plot(x,V(:,4))
>> subplot(5,1,5), plot(x,V(:,5))
```

Uppgift 2. Inför $x_i = ih, i = 0, 1, \cdots, n+1$, med $h = \frac{L}{n+1}$.

$$-u''(x_i) = \lambda u(x_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = h^2 \lambda u_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

Randvillkor: $u(0) = 0$ ger $u_0 = 0$ och $u'(L) + u(L) = 0$ ger $\frac{u_{n+1} - u_n}{h} + u_{n+1} = 0$, dvs. $u_{n+1} = \frac{1}{1+h} u_n$.

Matrisformulering med $c_n = 2 - \frac{1}{1+h}$ lyder

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = h^2 \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}$$

Uppgift 3. Vi tar ett egenvärde λ och motsvarande egenvektor $\boldsymbol{v}$ så att $\boldsymbol{Av} = \lambda\boldsymbol{v}$.
Med $\boldsymbol{B} = \alpha\boldsymbol{A}$ får vi

$$\boldsymbol{Bv} = \alpha\boldsymbol{Av} = \alpha(\lambda\boldsymbol{v}) = (\alpha\lambda)\boldsymbol{v}$$

Med $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \mu\boldsymbol{I}$ får vi

$$\boldsymbol{Bv} = (\boldsymbol{A} - \mu\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Av} - \mu\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} - \mu\boldsymbol{v} = (\lambda - \mu)\boldsymbol{v} \tag{1}$$

Med $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ får vi

$$\boldsymbol{Bv} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{v} = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{Av}) = \lambda^{-1}\boldsymbol{v} \tag{2}$$

Med $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} - \mu\boldsymbol{I})^{-1}$ får vi

$$\boldsymbol{Bv} = (\boldsymbol{A} - \mu\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{v} = (\lambda - \mu)^{-1}\boldsymbol{v}$$

där sista ledet följer direkt av (1) och (2).

Uppgift 4(a). Egenvärdesproblemet:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = \left|\begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix}\right| = (3+\lambda)(2+\lambda) - 2 =$$

$$= \lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda + 4)(\lambda + 1) = 0$$

Egenvektorn som hör ihop med $\lambda_1 = -4$:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ger } \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorn som hör ihop med $\lambda_2 = -1$:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_2\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ger } \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Lösningen till ODE-systemet:

$$\boldsymbol{u}(t) = c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\exp(-4t) + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\exp(-t)$$

$$\boldsymbol{u}(0) = c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\exp(-4t) + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\exp(-t)$$

(b). Euler framåt: $\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + h\boldsymbol{Au}_n = (\boldsymbol{I} + h\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}_n, n = 0, 1, \cdots, \boldsymbol{u}_0 = [1\ \ 1]^T$

$$\boldsymbol{u}_1 = (\boldsymbol{I} + 0.1\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix}$$