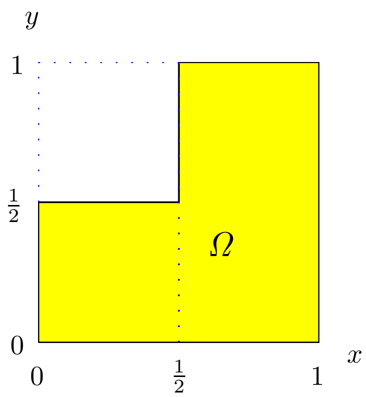
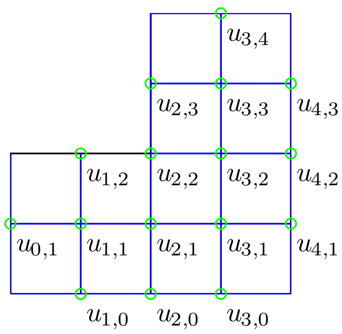
Uppgift 1. Vi vill lösa följande randvärdesproblem

$$\begin{cases} -(u''_{xx} + u''_{yy}) = f(x,y), \text{ i } \Omega \\ u = g(x,y), \text{ på } \partial\Omega \end{cases}$$

där Ω är området nedan, f och g givna funktioner.





Inför ett ekvidistant nät enligt figuren och låt $u_{i,j}$ beteckna en approximation av $u(x_i, y_j)$ och ersätt $-(u''_{xx} + u''_{yy})$ i punkten (x_i, y_j) med differenskvoten

$$\frac{-u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + 4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1}}{h^2}$$

Skriv ned alla ekvationer, först på komponetform och sedan på matrisform.

Uppgift 2. Följande paraboliska problem beskriver värmeutvecklingen $u(x,t)$ i en bromsskiva på bil vid kraftig inbromsning.

$$\begin{cases} u'_t - \kappa u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \ t > 0 \\ -Ku'_x(0,t) + H(u(0,t) - u_{omg}) = Q(t), \quad u'_x(L,t) = 0, \ t > 0 \\ u(x,0) = u_{omg}, \quad 0 \le x \le L \end{cases}$$

där $\kappa = 8 \cdot 10^{-6}, L = 6 \cdot 10^{-3}, K = 100, H = 10^4, u_{omg} = 20$ och $Q(t) = (1 - t/3) \cdot 10^7$ är värden för en viss bil och vissa yttre betingelser.

(a). Vi skall lösa problemet med linjemetoden. Skriv ned det begynnelsevärdesproblem vi får då vi approximerar x-derivatorna med differenskvoter. Vi vill ha svaret på vektorform.

(b). Skriv den kod i Matlab som behövs för att beskriva högerledet i systemet av differentialekvationer från **(a)** som en funktionsfil.

(c). Skriv den kod i Matlab som behövs för att med `ode45` beräkna temperaturen i bromsskivan under 3 sekunder.

Uppgift 3. Lös följande paraboliska problem

$$\begin{cases} u'_t = (1 + x^2)\, u''_{xx} + 2x\, u'_x,\ 0 < x < 1, t > 0 \\ u'_x(0, t) = 0, u(1, t) = 0,\ t > 0 \\ u(x, 0) = 1 - x^2,\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

(a). Skriv ned det begynnelsevärdesproblem vi får då vi approximerar x-derivatorna med differenskvoter, dvs. använder linjemetoden. Ge svaret på vektorform.

(b). Skriv en kod i MATLAB som med `ode45` beräkna lösningen för tiden $0 \le t \le 0.1$.

Uppgift 4. Betrakta egenvärdesproblemet för den partiella differentialekvationen

$$\begin{cases} -(u''_{xx} + u''_{yy}) = \lambda u,\ \text{i } \Omega \\ u = 0,\ \text{på } \partial\Omega \end{cases}$$

där Ω är enhetskvadraten.

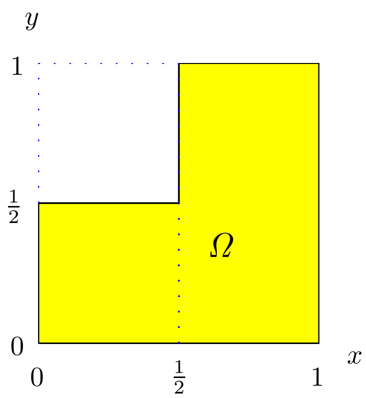
(a). Inför ett likformigt nät på området: $x_i = ih,\ i = 0, \cdots, n+1,\ y_j = jh,\ j = 0, \cdots, n+1$, $h = \frac{1}{n+1}$. Skriv ned det egenvärdesproblem för matris vi får då vi i problemet ersätter de partiella derivatorna med differensapproximationer.

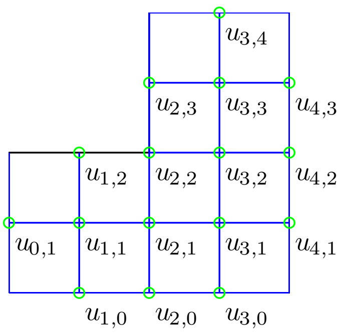
(b). Skriv ned den kod i MATLAB som behövs för att bygga upp matrisen samt lösa egenvärdesproblemet, komplettera lösningen med randvärden och rita upp. Matrisen skall lagras som en gles matris med `spdiags`. Vi skall beräkna de fem lösningarna med egenvärden närmast noll. Använd `eigs` för lösning av egenvärdesproblemet och `surf` vid uppritning.

Uppgift 1. Vi inför ett ekvidistant nät

$$x_i = ih,\ i = 0, \cdots, n+1, \quad y_j = jh,\ j = 0, \cdots, n+1, \quad h = \tfrac{1}{n+1}$$

med $n = 3$ som täcker Ω och så att noder beskriver områdets rand.





Låt $u_{i,j}$ beteckna en approximation av $u(x_i, y_j)$ och ersätt $-(u''_{xx} + u''_{yy})$ i punkten (x_i, y_j) med differenskvoten

$$\frac{-u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + 4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1}}{h^2}$$

Vi får ekvationerna

$$\begin{cases} -u_{2,1} - u_{1,2} + 4u_{1,1} - u_{0,1} - u_{1,0} = h^2 f_{1,1} \\ -u_{3,1} - u_{2,2} + 4u_{2,1} - u_{1,1} - u_{2,0} = h^2 f_{2,1} \\ -u_{4,1} - u_{3,2} + 4u_{3,1} - u_{2,1} - u_{3,0} = h^2 f_{3,1} \\ -u_{4,2} - u_{3,3} + 4u_{3,2} - u_{2,2} - u_{3,1} = h^2 f_{3,2} \\ -u_{4,3} - u_{3,4} + 4u_{3,3} - u_{2,3} - u_{3,2} = h^2 f_{3,3} \end{cases}$$

där $f_{i,j}$ betecknar $f(x_i, y_j)$.

Flyttar över kända värden till höger

$$\begin{cases} -u_{2,1} + 4u_{1,1} = h^2 f_{1,1} + u_{1,2} + u_{0,1} + u_{1,0} \\ -u_{3,1} + 4u_{2,1} - u_{1,1} = h^2 f_{2,1} + u_{2,2} + u_{2,0} \\ -u_{3,2} + 4u_{3,1} - u_{2,1} = h^2 f_{3,1} + u_{4,1} + u_{3,0} \\ -u_{3,3} + 4u_{3,2} - u_{3,1} = h^2 f_{3,2} + u_{4,2} + u_{2,2} \\ 4u_{3,3} - u_{3,2} = h^2 f_{3,3} + u_{4,3} + u_{3,4} + u_{2,3} \end{cases}$$

Vi låter $g_{i,j}$ betecknar randvärdena $g(x_i, y_j)$ och får med matrisbeteckningar

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{3,1} \\ f_{3,2} \\ f_{3,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{1,2} + g_{0,1} + g_{1,0} \\ g_{2,2} + g_{2,0} \\ g_{4,1} + g_{3,0} \\ g_{4,2} + g_{2,2} \\ g_{4,3} + g_{3,4} + g_{2,3} \end{bmatrix}$$

Uppgift 2(a). Inför nät med steglängden h i rumsled och ersätt u''_{xx} med D_+D_-. Låt $u_i(t)$ beteckna approximationen av $u(x_i, t)$. För differentialekvationen $u'_t - \kappa u''_{xx} = 0$ får vi

$$u'_i(t) = \kappa \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2}, \quad i = 1, \cdots, n, \quad 0 < t < T$$

och för randvillkoren $-Ku'_x(0,t) + H(u(0,t) - u_{omg}) = Q(t)$, $u'_x(L,t) = 0$ får vi

$$-K\frac{u_1(t) - u_0(t)}{h} + H(u_0(t) - u_{omg}) = Q(t), \quad \frac{u_{n+1}(t) - u_n(t)}{h} = 0, \quad 0 \le t \le T$$

eller

$$u_0(t) = (K/h + H)^{-1}(K/h\, u_1(t) + Hu_{omg} + Q(t)), \quad u_{n+1}(t) = u_n(t), \quad 0 \le t \le T$$

Begynnelsevillkoret $u(x, 0) = u_{omg}$ ger

$$u_i(0) = u_{omg}, \quad i = 1, \cdots, n$$

Begynnelsevärdesproblemet för ODE blir

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}'(t) = \frac{\kappa}{h^2}(\boldsymbol{b}(t) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{U}(t)), \quad 0 < t < T \\ \boldsymbol{U}(0) = \boldsymbol{U}_0 \end{cases}$$

där

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & a_n \end{bmatrix}$$

med $a_1 = 2 - (K/h + H)^{-1}K/h$, $a_n = 1$ och

$$\boldsymbol{U}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_{n-1}(t) \\ u_n(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{bmatrix} (K/h + H)^{-1}(Hu_{omg} + Q(t)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{U}_0 = \begin{bmatrix} u_{omg} \\ u_{omg} \\ \vdots \\ u_{omg} \\ u_{omg} \end{bmatrix}$$

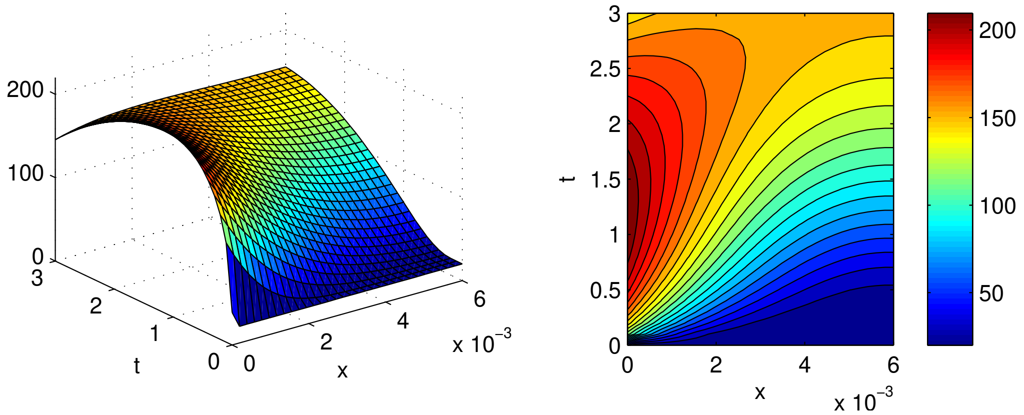
(b).

```
function dUdt=broms(t,U,kappa,h,A,K,H,uomg,n)
Q=(1-t/3)*1e7;
b=[(H*uomg+Q)/(K/h+H);zeros(n-1,1)];
dUdt=(b-A*U)*kappa/h^2;
```

(c).

```
kappa=8e-6; L=6e-3; K=100; H=1e4; uomg=20;
Q=@(t)(1-t/3)*1e7;
n=30; h=L/(n+1); x=h*[0:n+1]; tspan=linspace(0,3,n+1); e=ones(n,1);
U0=uomg*e;
```

```
A=spdiags([-e 2*e -e],[-1 0 1],n,n); A(1,1)=2-(K/h)/(K/h+H); A(n,n)=1;
[t,U]=ode45(@(t,U)broms(t,U,kappa,h,A,K,H,uomg,n),tspan,U0);
U=[(K/h*U(:,1)+H*uomg+Q(t))/(K/h+H),U,U(:,n)];  % Kantar lösningen med randvärden
subplot(2,2,1)
surf(x,t,U)
xlabel('x'), ylabel('t'), axis([0 L 0 3 0 220])
subplot(2,2,2)
contourf(x,t,U,20)
xlabel('x'), ylabel('t'), colorbar
```



Uppgift 3(a). Inför nät med steglängden h i rumsled, ersätt u''_{xx} med D_+D_- och u'_x med D_0. Låt $u_i(t)$ beteckna approximationen av $u(x_i,t)$. Vi får

$$u_i'(t) = (1+x_i^2)\frac{u_{i+1}(t)-2u_i(t)+u_{i-1}(t)}{h^2} + 2x_i\frac{u_{i+1}(t)-u_{i-1}(t)}{2h}, \quad i=1,\cdots,n, \quad t>0$$

Randvillkoren $u'_x(0,t)=0$ och $u(1,t)=0$ ger $u_0(t)=u_1(t)$ respektive $u_{n+1}(t)=0$.
Begynnelsevillkoret $u(x,0)=1-x^2$ ger

$$u_i(0) = 1-x_i^2, \quad i=1,\cdots,n$$

Begynnelsevärdesproblemet för ODE blir

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}'(t) = -\frac{1}{h^2}\boldsymbol{PAU}(t) + \frac{1}{h}\boldsymbol{QCU}(t), \quad t>0 \\ \boldsymbol{U}(0) = \boldsymbol{U}_0 \end{cases}$$

där

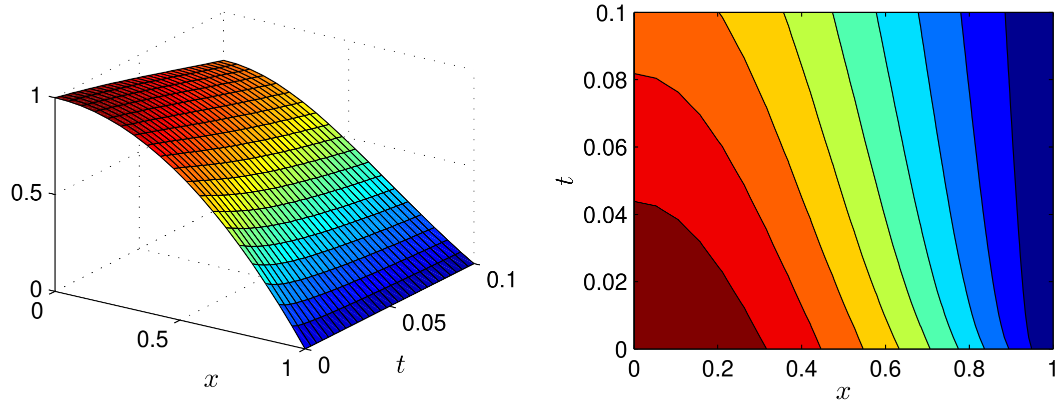
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & & & \\ -1 & 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 & -1 \\ & & & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_{n-1}(t) \\ u_n(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{U}_0 = \begin{bmatrix} 1-x_1^2 \\ 1-x_2^2 \\ \vdots \\ 1-x_{n-1}^2 \\ 1-x_n^2 \end{bmatrix}$$

samt $\boldsymbol{P}$ och $\boldsymbol{Q}$ diagonalmatriser med elementen $p_{ii} = 1+x_i^2$ respektive $q_{ii} = x_i$, $i=1,\cdots n$.

Uppgift (b).

```
n=30; T=0.1; h=1/(n+1); xi=h*(1:n)';
A=spdiags(ones(n,1)*[-1 2 -1],[-1 0 1],n,n); A(1,1)=1;
C=spdiags(ones(n,1)*[-1 1],[-1 1],n,n); C(1,1)=-1;
f=@(t,u)(1+xi.^2).*(-A*u)/h^2+xi.*(C*u)/h;
tspan=linspace(0,T,n+1); U0=1-xi.^2;
[t,U]=ode45(f,tspan,U0);
x=[0;xi;1]; U=[U(:,1),U,zeros(size(t))];
subplot(1,2,1)
surf(x,t,U), xlabel('x'), ylabel('t')
subplot(1,2,2)
contourf(x,t,U,20), xlabel('x'), ylabel('t')
```

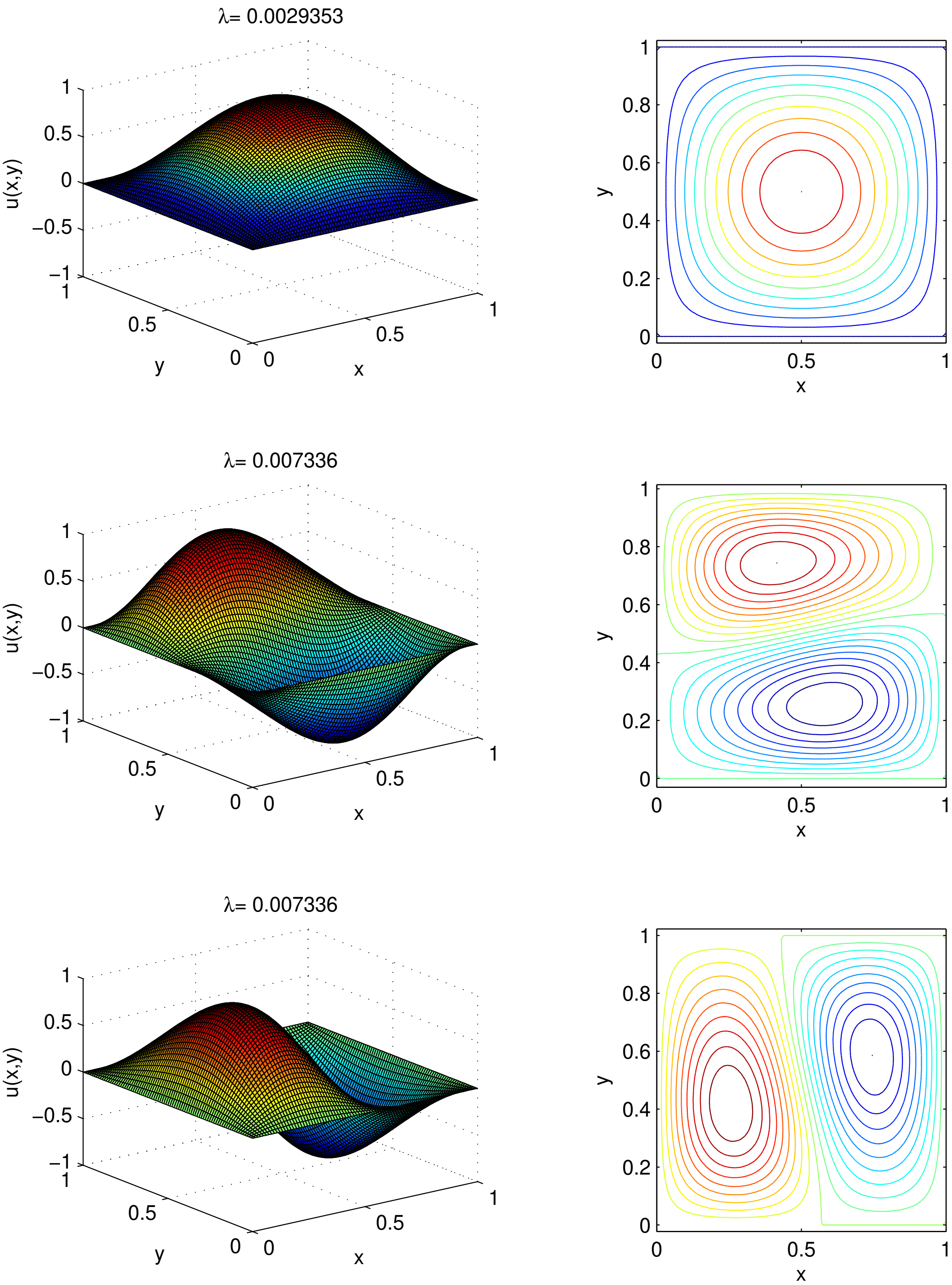


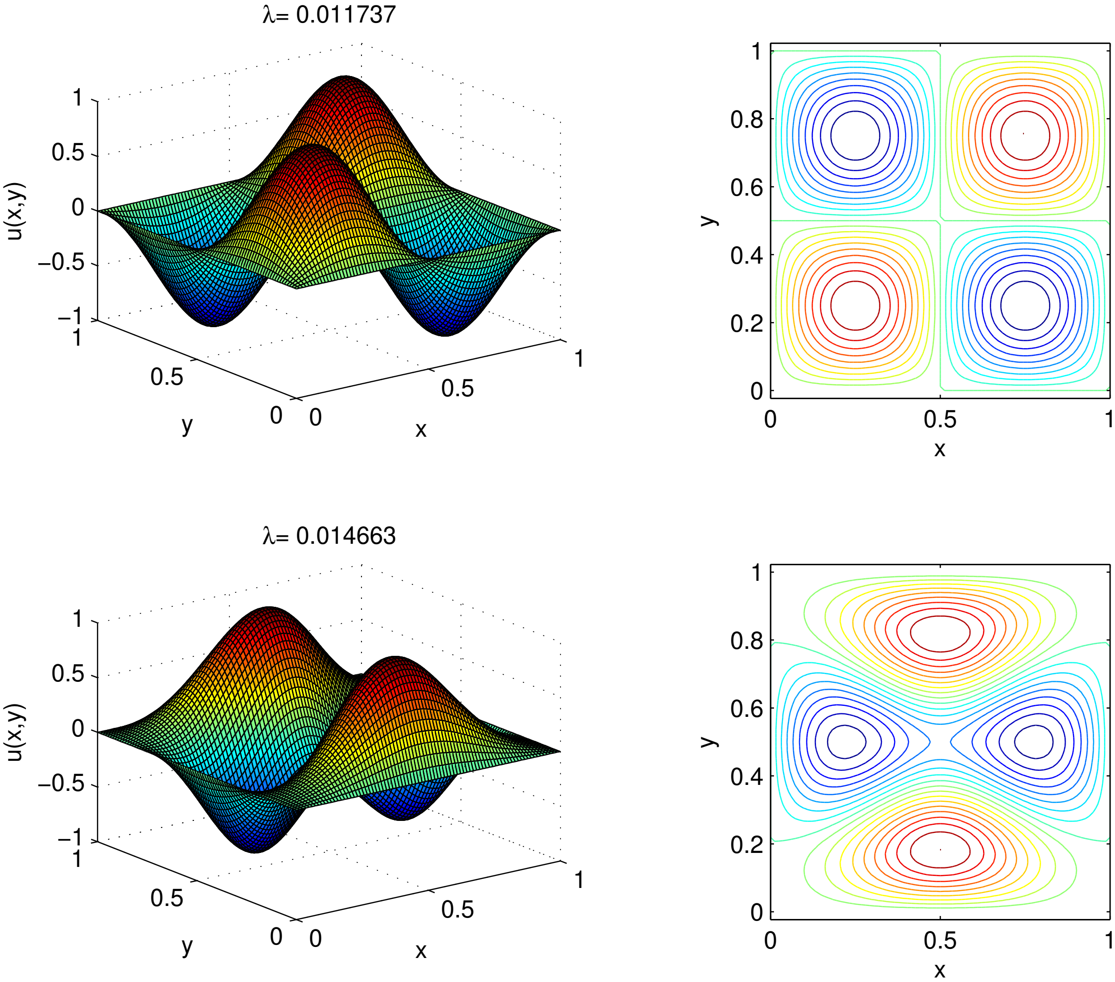
Uppgift 4(a). Samma indelning och matris $\boldsymbol{A}$ som i laboration 3 (uppgift 1) och laboration 6 (uppgift 1) ger egenvärdesproblemet $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \mu\boldsymbol{u}$. Här ger egenvektorn $\boldsymbol{u}$ en approximation av egenfunktionen $u(x, y)$ och egenvärdet till differentialekvationen ges av $\lambda = \mu/h^2$.

(b).

```
n=81; n2=n^2; e=ones(n2,1); h=1/(n+1);
x=[0:h:1]'; y=[0:h:1]';
A=spdiags([-e -e 4*e -e -e],[-n -1 0 1 n],n2,n2);
for k=n:n:(n-1)*n
    A(k,k+1)=0; A(k+1,k)=0;
end
ieg=5;
[V,D]=eigs(A,ieg,'sm');
D=diag(D); [D,I]=sort(D); V=V(:,I);
for i=1:ieg
    figure(i), clf
    u=V(:,i);
    U=[zeros(1,n+2); zeros(n,1) reshape(u,n,n) zeros(n,1); zeros(1,n+2)];
    subplot(2,2,1)
    surf(x,y,U), xlabel('x'), ylabel('y'), zlabel('u(x,y)')
    title(['\lambda= ',num2str(D(i))])
    axis([0 1 0 1 -1 1]), view(-37,24)
```

```
    subplot(2,2,2)
    contour(x,y,U,(-1:0.1:1)), xlabel('x'), ylabel('y'), axis equal
end
```




λ= 0.011737
u(x,y)
1
0.5
0
−0.5
−1
y
x
λ= 0.014663
u(x,y)
y
x