1 Inledning

Verktygslådan Symbolic Math Toolbox i Matlab kan utföra symbolisk matematik. Vi skall se på ett antal exempel på symboliska beräkningar inom analys och linjär algebra. Inget kan ersätta handräkning, men ibland kan man vara hjälpt av att ha möjlighet att låta Matlab eller något liknande programsystem utföra en del kalkyler.

Vi börjar med att göra en symbolisk formel för volymen av ett klot med radien r

```
>> syms r
>> volym=4/3*pi*r^3
volym =
(4*pi*r^3)/3
```

Med `syms` talar vi om vilka variabler som skall vara symboliska. Variabeln `volym` blir automatiskt symbolisk eftersom variabeln `r` var det.

Vi kan beräkna volymen för t.ex. $r = 3$ med `subs` enligt

```
>> v=subs(volym,r,3)
v =
36*pi
```

Symboliska variabeln `r` i uttrycket `volym` substitueras med värdet 3 och `v` räknas ut. Vill vi ha ett numeriskt värde får vi det med funktionen `double` enligt

```
>> vn=double(v)
vn =
  113.0973
```

Senare skall vi se hur vi kan göra om ett symboliskt uttryck till en function, som ett alternativt sätt att göra samma beräkning.

2 Algebraiska uttryck och ekvationslösning

Vi kan faktorisera, utveckla och förenkla ett uttryck med `factor`, `expand` och `simplify` enligt

```
>> syms a b
>> factor(a^2+2*a*b+b^2)
ans =
[ a + b, a + b]

>> expand((a+b)^4)
ans =
a^4 + 4*a^3*b + 6*a^2*b^2 + 4*a*b^3 + b^4
```

```
>> expand(sin(a+b))
ans =
cos(a)*sin(b) + cos(b)*sin(a)

>> simplify((a^2+b^2-2*a*b)/(a-b))
ans =
a - b

>> simplify(exp(a+b)/exp(a-b))
ans =
exp(2*b)
```

Vi kan lösa t.ex. polynomekvationen $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$ med `solve` enligt

```
>> syms x
>> s=solve(x^4-x^2+2*x-1==0)
s =
    - 5^(1/2)/2 - 1/2
      5^(1/2)/2 - 1/2
 1/2 - (3^(1/2)*1i)/2
 (3^(1/2)*1i)/2 + 1/2
```

dvs. vi har lösningarna (rötterna) $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ och $x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}$.

Vi kan få Matlab att skriva ut lite snyggare (mer lättläst) med `pretty(s)`. Pröva gärna!

3 Numerisk funktion av symboliska formler

I exemplet från inledningen gjorde vi en symbolisk formel för volymen av ett klot med radien r enligt

```
>> syms r
>> volym=4/3*pi*r^3
volym =
(4*pi*r^3)/3
```

Vi beräknade volymen numeriskt för $r = 3$ med

```
>> v=double(subs(volym,r,3))
v =
  113.0973
```

Alternativt kan vi göra en (numerisk) funktion av den symboliska formeln med `matlabFunction` enligt

```
>> volymfun=matlabFunction(volym)  % volymfun=matlabFunction(volym,'vars',{'r'})
volymfun =
    @(r)r.^3.*pi.*(4.0./3.0)
```

Nu kan vi beräkna volymen för t.ex. $r = 3$ som en helt vanlig funktionsberäkning

```
>> v=volymfun(3)
v =
  113.0973
```

Konstruktionen med `matlabFunction` gör det möjligt att rita upp symboliska funktioner. För att rita en graf måste man ju ha konkreta siffervärden. Detta kommer vi använda senare i denna laboration.

4 Gränsvärden, derivator och integraler

Vi kan beräkna gränsvärden

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} \qquad \lim_{x\to \pi/2^-} \tan(x) \qquad \lim_{x\to 0} x\,\sin(\frac{1}{x})$$

```
>> syms x a
>> limit(sin(a*x)/x,x,0)
ans =
a

>> limit(tan(x),x,pi/2,'left')
ans =
Inf

>> limit(x*sin(1/x),x,0)
ans =
0
```

Vi kan derivera en funktion. Låt oss som exempel ta

$$f(x) = \tan(1 + \cos(x^2))$$

Först inför vi en symbolisk variabel `x`, och sedan beskriver vi funktionen

```
>> syms x
>> f=tan(1+cos(x^2));
```

För att derivera använder vi funktionen `diff` enligt

```
>> Df=diff(f,x)
Df =
  -2*x*sin(x^2)*(tan(cos(x^2) + 1)^2 + 1)
```

Vi kan också beräkna högre ordningens derivator, t.ex. `diff(f,x,2)` beräknar andraderivatan.

Vi kan bestämma antiderivata (primitiv funktion)

$$\int 15x^2 - 8x + 9 \; dx$$

```
>> syms x
>> f=15*x^2-8*x+9;
>> F=int(f,x)
F =
x*(5*x^2 - 4*x + 9)

>> F=expand(F)
F =
5*x^3 - 4*x^2 + 9*x
```

Integrationskonstanten får vi hålla reda på själva. Vi deriverar för att kontrollera svaret

```
>> DF=diff(F,x)
DF =
15*x^2 - 8*x + 9
```

Avslutningvis beräknar vi den bestämda integralen $\int_0^1 x\sin(x)\,dx$ enligt

```
>> syms x
>> f=x*sin(x);
>> q=int(f,x,0,1)
q =
  sin(1) - cos(1)
```

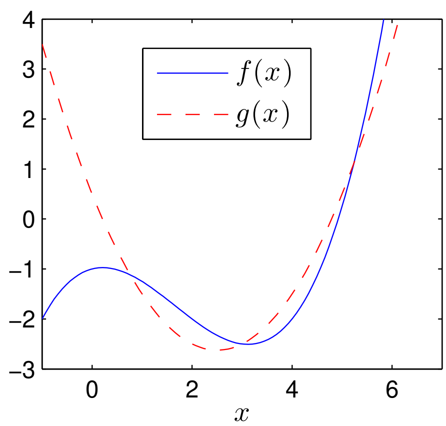
Kontrollera gärna svaret genom att räkna ut för hand med partialintegration.

Uppgift 1. Beräkna arean A av de områden som omsluts av graferna till funktionerna

$$f(x) = \frac{x^3}{8} - \frac{5x^2}{8} + \frac{x}{4} - 1 \qquad g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + \frac{1}{2}$$

Ledning: Definiera funktionerna, både symboliskt och numeriskt (avsnitt 3), och rita deras grafer med

```
>> syms x
>> f=x^3/8-5*x^2/8+x/4-1
>> g=x^2/2-5*x/2+1/2
>> fn=matlabFunction(f);
>> gn=matlabFunction(g);
>> xn=linspace(-1,7);
>> plot(xn,fn(xn),xn,gn(xn),'r--')
>> axis equal, axis([-1 7 -3 4])
```



Bestäm sedan skärningspunkterna med `solve` (avsnitt 2) enligt

```
>> s=solve(f-g)
s =
           3
 3 - 5^(1/2)
 5^(1/2) + 3
```

för att sedan beräkna arean med `int` på lämpligt sätt. Integrationsgränserna plockar ni ur vektorn `s`, t.ex. `s(3)` ger skärningen längst till höger. (Svaret skall bli $A = \frac{25}{16}$.)

5 Differentialekvationer

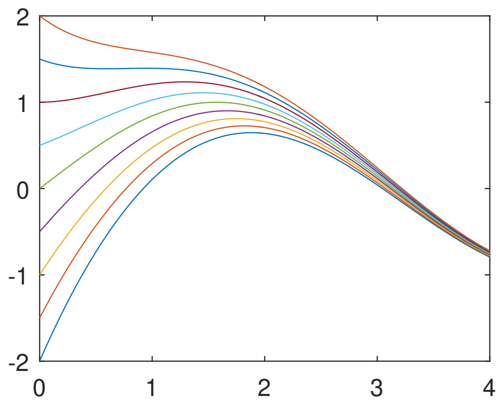
Vi beräknar lösningar till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u' = -u(t) + \sin(t) + \cos(t), \; 0 \leq t \leq 4 \\ u(0) = c \end{cases}$$

```
>> syms u(t) c
>> u=dsolve(diff(u)==-u+sin(t)+cos(t),u(0)==c)
u =
sin(t) + c*exp(-t)
```

och ritar upp lösningarna för några olika värden på c med

```
>> ufun=matlabFunction(u,'vars',{'t','c'})
ufun =
    @(t,c)sin(t)+c.*exp(-t)
>> tn=linspace(0,4);
>> for c=-2:0.5:2
       plot(tn,ufun(tn,c)), hold on
   end
```



Vi löser ett följande begynnelsevärdesproblem för system av ekvationer

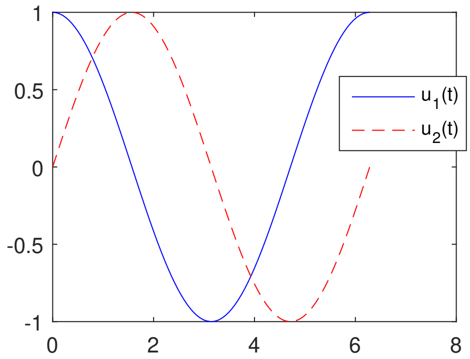
$$\begin{cases} u_1' = -u_2(t), \; u_1(0) = 1 \\ u_2' = u_1(t), \; u_2(0) = 0 \end{cases}$$

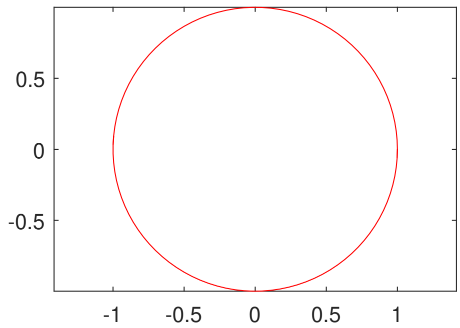
enligt

```
>> syms u1(t) u2(t)
>> usol=dsolve(diff(u1,t)==-u2,diff(u2,t)==u1,u1(0)==1,u2(0)==0);
```

och ritar upp med

```
>> u1fun=matlabFunction(usol.u1,'vars',{'t'});
>> u2fun=matlabFunction(usol.u2,'vars',{'t'});
>> tn=linspace(0,2*pi);
>> subplot(1,2,1)
>> plot(tn,u1fun(tn),'b',tn,u2fun(tn),'r--')
>> legend('u_1(t)','u_2(t)')
>> subplot(1,2,2)
>> plot(u1fun(tn),u2fun(tn),'r'), axis equal
```





Vi beräknar allmänna lösningen till den andra ordningens differentialekvation

$$u'' + 2u' + u = 2\sin(t)$$

```
>> syms u(t)
>> Du=diff(u); D2u=diff(u,2);
>> u=dsolve(D2u+2*Du+u==2*sin(t))
u =
C1*exp(-t) - cos(t) + C2*t*exp(-t)
```

och kontrollerar att lösningen verkligen uppfyller ekvationen med

```
>> r=simplify(diff(u,2)+2*diff(u)+u-2*sin(t))
r =
0
```

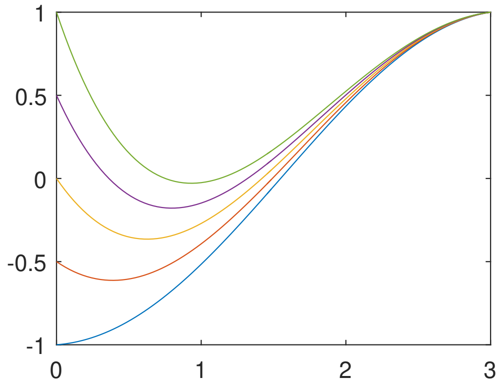
Motsvarande randvärdesproblem

$$\begin{cases} u'' + 2u' + u = 2\sin(t), \ 0 \le t \le 3 \\ u(0) = c, \ u(3) = 1 \end{cases}$$

löser vi för olika c och ritar upp med

```
>> syms u(t) c
>> Du=diff(u); D2u=diff(u,2);
>> u=dsolve(D2u+2*Du+u==2*sin(t),u(0)==c,u(3)==1);
>> ufun=matlabFunction(u,'vars',{'t','c'});
```

```
>> tn=linspace(0,3);
>> for c=-1:0.5:1
       plot(tn,ufun(tn,c)), hold on
   end
```



Uppgift 2. Rita graferna av lösningen till differentialekvationen $u' + \frac{u}{t+1} = (t-1)\sin(t)$ över intervallet $-10 \leq t \leq 10$, för några olika värden på konstanten i lösningen.

6 Taylorutveckling

Vi kan Taylorutveckla exempelvis $f(x) = \sqrt{x}$ runt $a = 4$, och ta med termer t.o.m. ordning $n = 3$, med funktionen `taylor` enligt

```
>> syms x a n
>> a=4; n=3;
>> t=taylor(sqrt(x),x,a,'Order',n+1)
t =
x/4 - (x - 4)^2/64 + (x - 4)^3/512 + 1
```

Lägg märke till att vi skall ge gradtalet plus 1 som parameter till `taylor`. Resttermen bestämmer vi med

```
>> syms xi
>> r=diff(sqrt(xi),n+1)/factorial(n+1)*(x-a)^(n+1)
r =
-(5*(x - 4)^4)/(128*xi^(7/2))
```

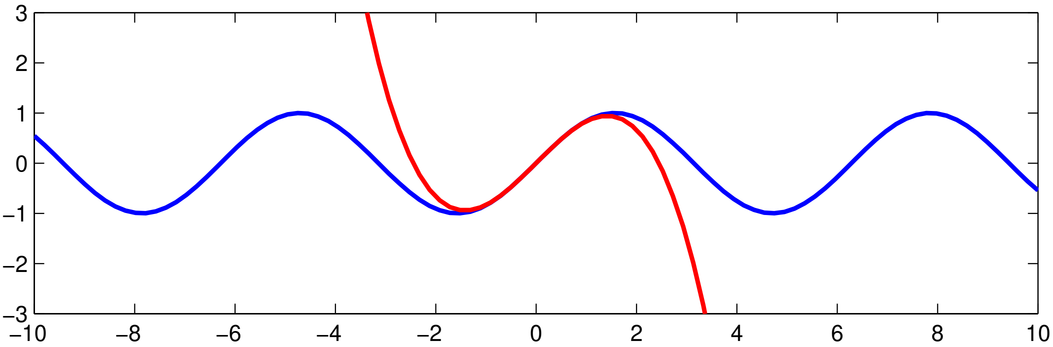
Vi får alltså $f(x) = 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512} - \frac{5\xi^{-7/2}}{128}(x-4)^4$.

Vi kan Maclaurinutveckla $f(x) = \sin(x)$ med

```
>> syms x n
>> n=3;
>> f=sin(x);
>> t=taylor(f,'Order',n+1)
t =
- x^3/6 + x
```

och rita upp funktionen och Maclaurinpolynomet med

```
>> fn=matlabFunction(f);      % fn blir numerisk motsvarighet till f
>> tn=matlabFunction(t);      % tn blir numerisk motsvarighet till t
>> xn=linspace(-10,10);       % xn numeriska x-värden för uppritning
>> plot(xn,fn(xn),'b',xn,tn(xn),'r','linewidth',2)
>> axis equal, axis([xn(1) xn(end) -3 3])
```



Uppgift 3. Bestäm Maclaurinpolynomen till $f(x) = \sin(x)$ av successivt allt högre gradtal ($n = 1, 3, \cdots, 21$ exempelvis). Rita successivt upp Maclaurinpolynomen i en figur där ni redan har ritat $f(x)$. Lägg en liten paus mellan varje uppritning.

7 Linjära ekvationssystem

Vi löser det linjära ekvationssystemet $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ med

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Vi skriver in $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{b}$ med funktionen `sym` som gör att talen lagras som rationella tal.

```
>> A=sym([2 3; 5 4])
A =
[ 2, 3]
[ 5, 4]

>> b=sym([8; 13])
b =
  8
 13
```

Vi gör `rref` exakt med

```
>> rref([A b])
ans =
[ 1, 0, 1]
[ 0, 1, 2]
```

och läser av lösningen

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi kan också lösa exakt med backslash-kommandot (\)

```
>> x=A\b
x =
 1
 2
```

Vi kontrollerar att ekvationssystemet är uppfyllt med

```
>> r=A*x-b
r =
 0
 0
```

Vi kan ocskå ha ett helt symboliskt ekvationssytem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ med

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

```
>> syms a b c d
>> A=[a b; c d]
A =
[ a, b]
[ c, d]

>> syms e f
>> b=[e; f]
b =
 e
 f

>> x=A\b
x =
 -(b*f - d*e)/(a*d - b*c)
  (a*f - c*e)/(a*d - b*c)
```

Notera att vi får division med noll om matrisen singulär, dvs. om $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.

```
>> det(A)
ans =
a*d - b*c
```

Vi ser på residualen med

```
>> r=simplify(A*x-b)
r =
 0
 0
```

Här använde vi `simplify` för att få ett förenklat uttryck. Pröva gärna `r=A*x-b` själva för att se hur det annars ser ut.

Vi kan beräkna inversen $\boldsymbol{A}^{-1}$ av en matris $\boldsymbol{A}$ enligt

```
>> A=sym([2 3; 5 4])
A =
[ 2, 3]
[ 5, 4]

>> B=inv(A)
B =
[ -4/7,  3/7]
[  5/7, -2/7]

>> A*B
ans =
[ 1, 0]
[ 0, 1]
```

Vi ser att $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ som förväntat. Kontrollera gärna att även $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$.

Uppgift 4. Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Beräkna en formel för $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Uppgift 5. Vi ser på rotationsmatrisen

$$\boldsymbol{A}_\phi = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

Beräkna $\boldsymbol{A}_\phi^2 = \boldsymbol{A}_\phi \boldsymbol{A}_\phi$ som motsvarar en rotation med vinkeln 2ϕ. Stämmer det, är $\boldsymbol{A}_\phi^2 = \boldsymbol{A}_{2\phi}$? Beräkna sedan $\boldsymbol{A}_\phi^{-1}$. Vad är motsvarande rotation?

8 Nollrum och kolonnrum

Vi beräknar nollrummet $\mathrm{Nul}(\boldsymbol{A})$ och kolonnrummet $\mathrm{Col}(\boldsymbol{A})$ till en matris

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

```
>> A=sym([-3  6 -1  1 -7
           1 -2  2  3 -1
           2 -4  5  8 -4])
A =
[ -3,  6, -1,  1, -7]
[  1, -2,  2,  3, -1]
```

```
[  2, -4,  5,  8, -4]

>> N=null(A)
N =
[  2,  1, -3]
[  1,  0,  0]
[  0, -2,  2]
[  0,  1,  0]
[  0,  0,  1]

>> R=colspace(A)
R =
[    1,    0]
[    0,    1]
[  1/5, 13/5]
```

Vi har alltså $\mathrm{Nul}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ där

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och $\mathrm{Col}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{span}(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$ där

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

9 Egenvärdesproblem

Vi löser egenvärdesproblemet $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ med

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
>> A=sym([2 3 1; 5 4 6; 1 0 2])
A =
[ 2, 3, 1]
[ 5, 4, 6]
[ 1, 0, 2]

>> [V,D]=eig(A)
V =
[ -2,      2 - 2*3^(1/2),      2*3^(1/2) + 2]
[  1, 5 - (8*3^(1/2))/3, (8*3^(1/2))/3 + 5]
[  1,                  1,                  1]
```

```
D =
[ 0,            0,            0]
[ 0, 4 - 2*3^(1/2),           0]
[ 0,            0, 2*3^(1/2) + 4]
```

Får alltså egenvärdena $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_{2,3} = 4 \pm 2\sqrt{3}$ med motsvarande egenvektorer

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2+2\sqrt{3} \\ 5+\frac{9}{3}\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2-2\sqrt{3} \\ 5-\frac{9}{3}\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi kan lösa det linjära systemet av ODE från exemplet i laboration 4.

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}, \ t > 0 \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \end{cases}$$

där

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{bmatrix}$$

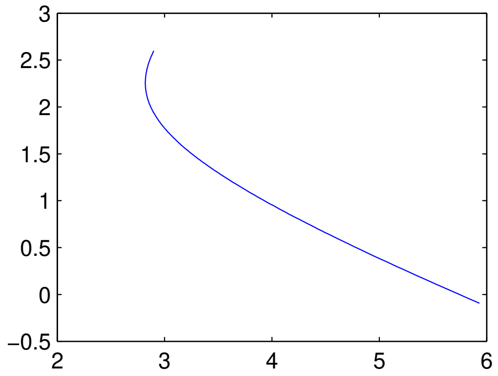
```
>> A=sym([4 -5; -2 1]);
>> [V,D]=eig(A)
V =
[ 1, -5/2]
[ 1,    1]

D =
[ -1, 0]
[  0, 6]

>> u0=sym([2.9; 2.6]);
>> c=V\u0
c =
 94/35
 -3/35

>> syms t
>> u=c(1)*V(:,1)*exp(D(1,1)*t)+c(2)*V(:,2)*exp(D(2,2)*t)
u =
 (94*exp(-t))/35 + (3*exp(6*t))/14
 (94*exp(-t))/35 - (3*exp(6*t))/35
```

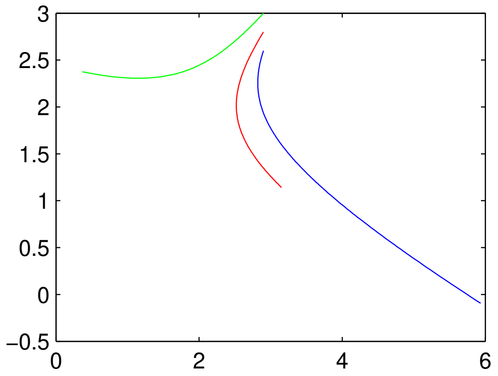
dvs. lösningsformeln

$$\boldsymbol{u}(t) = \frac{-3}{70}\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}\exp(6t) + \frac{188}{70}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\exp(-t)$$

Nu gör vi en numerisk funktion och ritar upp en lösningskurva.

```
>> un=matlabFunction(u);
>> tn=linspace(0,0.5,200);
>> Un=un(tn);
>> plot(Un(1,:),Un(2,:))
```





I bilden ovan till höger har vi ritat ett antal lösningskurvor. Om vi låter begynnelsevärdena vara symboliska och räknar på får vi en (ganska ful) formel som är lämplig för att göra en numerisk funktion som beror av t, men också av begynnelsevärdena i vektorn $\boldsymbol{u}_0$.

```
>> syms u01 u02 t
>> u0=[u01; u02];
>> c=V\u0;
>> u=c(1)*V(:,1)*exp(D(1,1)*t)+c(2)*V(:,2)*exp(D(2,2)*t);
>> un=matlabFunction(u,'vars',{'t','u01','u02'});
```

Nu är det bara att sätta in siffervärden på begynnelsevärdena och rita upp.

```
>> tn=linspace(0,0.5,200);
>> Un=un(tn,2.9,2.6);
>> plot(Un(1,:),Un(2,:),'b'), hold on
>> Un=un(tn,2.9,2.8);
>> plot(Un(1,:),Un(2,:),'r')
>> Un=un(tn,2.9,3.0);
>> plot(Un(1,:),Un(2,:),'g')
```

10 Partiella derivator

Vi kan beräkna partiella derivator. Låt oss som exempel derivera $f(x,t) = \sin(xt^2)$ med avseende på t. Först definierar vi funktionen

```
>> syms x t
>> f=sin(x*t^2)
f =
sin(t^2*x)
```

sedan beräknar derivatorna med

```
>> dfdt=diff(f,t)
dfdt =
2*t*x*cos(t^2*x)

>> dfdx=diff(f,x)
dfdx =
t^2*cos(t^2*x)
```

Vi kan bilda Jacobimatrisen till

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1^3 + x_2^2 - 1 \\ \exp(x_1 x_2) + x_1 + x_2 - 2 \end{bmatrix}$$

enligt

```
>> syms x1 x2
>> f1=x1^3+x2^2-1;
>> f2=exp(x1*x2)+x1+x2-2;
>> f=[f1;f2]
f =
          x1^3 + x2^2 - 1
 x1 + x2 + exp(x1*x2) - 2

>> x=[x1;x2];
>> Df=jacobian(f,x)
Df =

[            3*x1^2,              2*x2]
[ x2*exp(x1*x2) + 1, x1*exp(x1*x2) + 1]
```

Givetvis fungerar det även med

```
>> Df=[diff(f1,x1) diff(f1,x2)
       diff(f2,x1) diff(f2,x2)]
```

som ger exakt samma svar.

Låt oss bilda gradienten till

$$f(\boldsymbol{x}) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1 x_2(x_1 - x_2 - 1)$$

Vi definierar funktionen

```
>> syms x1 x2
>> f=2*x1^3-3*x1^2-6*x1*x2*(x1-x2-1)
```

och beräknar de partiella derivatorna

```
>> dfdx1=diff(f,x1)
dfdx1 =
6*x2*(x2 - x1 + 1) - 6*x1*x2 - 6*x1 + 6*x1^2
>> dfdx2=diff(f,x2)
dfdx2 =
6*x1*x2 + 6*x1*(x2 - x1 + 1)
```

som vi sedan sätter ihop till gradienten $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x})$ med

```
>> gradf=[dfdx1;dfdx2]
gradf =
 6*x2*(x2 - x1 + 1) - 6*x1*x2 - 6*x1 + 6*x1^2
                6*x1*x2 + 6*x1*(x2 - x1 + 1)
```

Alternativt använder vi `gradient` enligt

```
>> gradf=gradient(f,[x1 x2])
```

eller

```
>> x=[x1;x2];
>> gradf=gradient(f,x)
```

Hessematrisen bildar vi med `hessian` enligt

```
>> H=hessian(f,[x1 x2])
H =
[ 12*x1 - 12*x2 - 6, 12*x2 - 12*x1 + 6]
[ 12*x2 - 12*x1 + 6,             12*x1]
```

eller

```
>> H=hessian(f,x)
```

Vi passar på att nämna att man kan försöka lösa ickelinjära ekvationssystem med `solve`. Låt oss lösa systemet

$$\begin{cases} 2x_1 - x_1x_2 = 0 \\ x_2 + 0.4x_1x_2 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

Så här gör vi

```
>> syms x1 x2
>> f1=2*x1-x1*x2; f2=x2+0.4*x1*x2-x2^2
>> [x1s,x2s]=solve([f1==0,f2==0],[x1,x2])
x1s =
   0
   0
 5/2

x2s =
 0
 1
 2
```

11 Dubbelintegraler

Vi kan beräkna dubbelintegralen (och trippelintegraler) med upprepad integration. Som exempel tar vi dubbelintegralen

$$\iint_R y\,\sin(x) + x\,\cos(y)\,dA$$

där $R = \{(x, y)\colon\ 0 \le x \le \pi,\ \pi \le y \le 2\pi\}$.

Vi integrerar först m.a.p. x och sedan m.a.p. y (eller omvänt om vi vill) enligt

```
>> syms x y
>> q=int(int(y*sin(x)+x*cos(y),x,0,pi),y,pi,2*pi)
q =
3*pi^2
```

Som ytterligare ett exempel beräknar vi integralen

$$\iint_D (a - x + y)\,dA$$

där $D = \{\,(x, y)\colon 0 \le y \le a - \frac{x^2}{a}\,\}$.

Här integrerar vi först m.a.p. y och sedan m.a.p. x enligt

```
>> syms x y a
>> q=int(int(a-x+y,y,0,a-x^2/a),x,-a,a)
q =
(28*a^3)/15
```

Vi avslutar med att beräkna integralen

$$\iint_R y\,\sin(y + x^2)\,dA$$

där $R = \{(x, y)\colon\ 0 \le x \le 1,\ -\pi/2 \le y \le \pi/2\}$.

Vi integrerar enligt

```
>> syms x y
>> q=int(int(y*sin(y+x^2),x,0,1),y,-pi/2,pi/2)
q=
2^(1/2)*pi^(1/2)*fresnelc(2^(1/2)/pi^(1/2))
```

Svaret blir alltså

$$q = \sqrt{2\pi}\,C\Big(\sqrt{2/\pi}\Big)$$

där $C(x)$ är den Fresnelintegral som definieras av

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$$

Vi såg på denna integral i räkneövningen 1 och eftersom den inte går att beräkna exakt så gäller samma för q. Man kan dock beräkna ett numeriskt värde (en approximation) med

```
>> qn=double(q)
qn =
    1.8090
```