Taylorutveckling

Vi skall lokalt runt en punkt a approximera en funktion $f(x)$ med ett polynom $p(x)$.

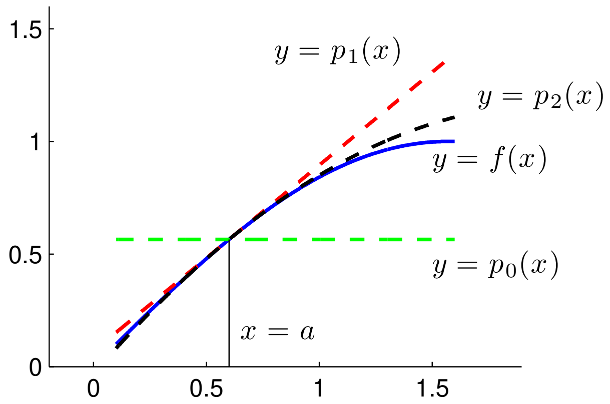
Ett naturligt önskemål är att $p(a) = f(a)$, $p'(a) = f'(a)$, $p''(a) = f''(a)$, $\cdots$

Först tar vi följande polynom av grad $n = 0$

$$p_0(x) = f(a)$$

vilket är en horisontell rät linje genom punkten $(a, f(a))$.

Villkoret $p(a) = f(a)$ är uppfyllt, dvs. vi beskriver *nivån* för grafen till $f(x)$ i $x = a$.



Sedan tar vi följande polynom av grad $n = 1$

$$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

vilket är tangenten till f i punkten $(a, f(a))$.

Nu är även $p'(a) = f'(a)$ uppfyllt, dvs. vi får med *lutningen* hos grafen till $f(x)$ i $x = a$.

Därefter tar vi följande polynom av grad $n = 2$

$$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

Nu är dessutom $p''(a) = f''(a)$ uppfyllt, dvs. vi får med *böjningen* hos grafen till $f(x)$ i $x = a$.

Allmänt får vi det s.k. *Taylorpolynomet* av grad n

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

som uppfyller villkoren

$$p(a) = f(a),\ p'(a) = f'(a),\ p''(a) = f''(a),\ \cdots,\ p^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Vad gäller för $f(x) - p_n(x)$, dvs. hur noggrann är approximationen?

Sats: *Taylors formel.* Om $f(x)$ har $n+1$ kontinuerliga derivator i en omgivning av a så gäller

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

där

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

med ξ någonstans mellan x och a.

Bevis: Med t som integrationsvariabel har vi

$$\int_a^x f'(t)\,dt = [f(t)]_a^x = f(x) - f(a)$$

eller

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

Vi partialintegrerar[1]. En primitiv funktion till 1 är $-(x-t)$.

$$\int_a^x 1 \cdot f'(t)\,dt = [-(x-t)f'(t)]_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt =$$

$$= f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt$$

Vi har

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt$$

Partialintegration igen. En primitiv funktion till $(x-t)$ är $-\frac{(x-t)^2}{2!}$.

$$\int_a^x (x-t)f''(t)\,dt = \left[-\frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)\,dt =$$

$$= \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)\,dt$$

Vi har

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)\,dt$$

Vi fortsätter partialintegrera och får

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Integralkalkylens generaliserade medelvärdessats[2] ger

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt = f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

eftersom $\frac{(x-t)^n}{n!}$ inte växlar tecken på intervallet $[a,x]$ och funktionerna är kontinuerliga.

[1] $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$

[2] $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$ om f är kontinuerlig och g inte växlar tecken samt är styckvis kontinuerlig.

Speciellt gäller för $n = 0$ att

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x - a)$$

dvs. samma resultat som ges av differentialkalkylens medelvärdessats. För $n = 1$ gäller att

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2$$

vilket är en *linjärisering*, dvs. vi har en linjär modell av funktionen (funktionen approximeras av sin tangent). Vidare gäller för $n = 2$ att

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}(x - a)^3$$

vilket är en kvadratisk modell av funktionen.

Resttermen i Taylors formel

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}$$

kallas *Lagranges* restterm och ger en exakt beskrivning av felet.

Ofta behöver man inte denna exakta restterm utan nöjer sig med följande enklare variant av Taylors formel

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \mathcal{O}(h^{n+1})$$

där $h = x - a$.

Här kallas $\mathcal{O}$ för *stort ordo* och med $\mathcal{O}(h^{n+1})$ avser man termer som går mot noll lika fort som h^{n+1} då $h \to 0$, dvs. då $x \to a$.

I beviset av Taylors formel använder vi partialintegration och integralkalkylens generaliserade medelvärdessats.

Formeln för partialintegration

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

får vi genom att derivera en produkt av två funktioner $u(x)$ och $v(x)$, som vi sedan integrerar.

Vi har $(uv)' = u'v + uv'$ och integration från a till b ger $[uv]_a^b = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx$ eller $\int_a^b u'v\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'\,dx$. Låt nu $u = F$ och $v = g$.

Sats: *Integralkalkylens medelvärdessats.* Om $f(x)$ är kontinuerlig på $a \leq x \leq b$ så gäller

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

med $a \leq \xi \leq b$.

Bevis: Låt $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ och $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$. Vi har $m \leq f(x) \leq M$ och därmed

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Låt

$$c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

och vi har $m \leq c \leq M$.

Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig så finns ett ξ i $a \leq x \leq b$ så att $f(\xi) = c$.

Sats: *Integralkalkylens generaliserade medelvärdessats.* Om $f(x)$ är kontinuerlig på $a \leq x \leq b$ och $g(x)$ är styckvis kontinuerlig och inte växlar tecken på $a \leq x \leq b$ så gäller

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

med $a \leq \xi \leq b$.

Bevis: Antag $g(x) \geq 0$. Låt $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ och $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$. Vi har

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

och därmed

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx$$

Låt

$$c = \frac{1}{\int_a^b g(x)\,dx}\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

och vi har $m \leq c \leq M$.

Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig så finns ett ξ i $a \leq x \leq b$ så att $f(\xi) = c$.

Vi skall se varför vi väljer en viss primitiv funktion i början av beviset av Taylors formel.

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt = f(a) + \int_a^x 1 \cdot f'(t)\,dt$$

En primitiv funktion till 1 är $t + c$, där c är en konstant vi skall välja på lämpligt sätt.

$$f(x) = f(a) + [(t+c)f'(t)]_a^x - \int_a^x (t+c)f''(t)\,dt =$$

$$= f(a) + (x+c)f'(x) - (a+c)f'(a) - \int_a^x (t+c)f''(t)\,dt$$

Vi vill ta $c = -x$ så att vi inte får med termen med $f'(x)$. Detta val av c ger

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt$$

Sedan fortsätter vi som tidigare.