

Övningsstenta 1 lösningar

$$\begin{aligned} 1. a) \quad \frac{d}{dx} \frac{1}{(f(x))^2 + 1} \Big|_{x=4} &= \frac{-1}{((f(x))^2 + 1)^2} \cdot 2f(x)f'(x) \Big|_{x=4} = \\ &= \frac{-1}{((f(4))^2 + 1)^2} \cdot 2f(4)f'(4) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \int \frac{x+1}{x^2-x} dx &= \int \frac{x+1}{(x-1)x} dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} \right) dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx \\ c) \quad &= 2 \ln|x-1| - \ln|x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+\ln x)}{\ln x^2} &= \left[\begin{array}{l} \ln x = t \\ x \rightarrow 1 \Leftrightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{2t} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad \int_0^{\infty} t e^{-t} dt &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R t e^{-t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-e^{-t} t \right]_0^R + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-t} dt \\ e) \quad &= 0 + \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-e^{-t} \right]_0^R = 1. \end{aligned}$$

$$e) \quad KE: t^2 + t + 1 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad r_1 = r_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad y_h = (C_1 x + C_2) e^{-x}$$

Ansätt: $y_p = ax^2 + bx + c$. Derivering och insättning i (DE)

$$\text{Ger } a=1, b=-4 \text{ och } c=6$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_p = (C_1 x + C_2) e^{-x} + x^2 - 4x + 6$$

Övningsstenta 1 lösningar

$$\begin{aligned} 1. a) \quad \frac{d}{dx} \frac{1}{(f(x))^2 + 1} \Big|_{x=4} &= \frac{-1}{((f(x))^2 + 1)^2} \cdot 2f(x)f'(x) \Big|_{x=4} = \\ &= \frac{-1}{((f(4))^2 + 1)^2} \cdot 2f(4)f'(4) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \int \frac{x+1}{x^2-x} dx &= \int \frac{x+1}{(x-1)x} dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} \right) dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= 2 \ln|x-1| - \ln|x| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+\ln x)}{\ln x^2} &= \left[\begin{array}{l} \ln x = t \\ x \rightarrow 1 \Leftrightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{2t} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad \int_0^{\infty} t e^{-t} dt &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R t e^{-t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-e^{-t} t \right]_0^R + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-t} dt \\ &= 0 + \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-e^{-t} \right]_0^R = 1. \end{aligned}$$

$$e) \text{ KE: } r^2 + r + 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = -1 \Rightarrow y_h = (C_1 x + C_2) e^{-x}$$

Ansätt: $y_p = ax^2 + bx + c$. Derivering och insättning i (DE)

$$\text{Ger } a=1, b=-4 \text{ och } c=6$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_p = (C_1 x + C_2) e^{-x} + x^2 - 4x + 6$$

2. a) Se boxen.

b) $y' \cos x - y \sin x = \cos(xy)(y + xy')$

Sätt in $x=0, y=1 \Rightarrow y'(0)=1$

Tang. exv. $y-y_0 = y'(0)(x-x_0) \Rightarrow y = x+1$

3. a) Se boxen.

b) $A = \int_0^{\pi} \sin^3 x \, dx = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right]$
 $= -\int_1^{-1} (1 - t^2) \, dt = \int_{-1}^1 (1 - t^2) \, dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$

4. def. mängd: $x > 0$; $f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{1 - 4\sqrt{x}}{2x}$

Se vi att $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0^+$

$f(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$

$f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-2} + x^{-3/2} = x^{-2} \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{x} \right)$

$f'(x) = 0$ då $x = 1/4$

x	0		1/4		∞
f'		-	0	+	
f	∞		-2		0

Funktionen har en enda lokal (och global) extrempunkt:
 $x = 1/4$ är lokalt (och globalt) minimum. $V_f = [-2, \infty)$.

$f''(x) = x^{-3} - \frac{3}{2} x^{-5/2} =$
 $= \frac{3}{2} x^{-3} \left(\frac{2}{3} - \sqrt{x} \right)$

x		4/9	
f''	+	0	-
f	konvex	inf. Punkt	konkav

Rita grafen



5. Vi skriver (DE) som

$$I' + kI = 0$$

och löser den som en linjär (DE) av första ordningen.

$$\text{l.f.: } e^{F(x)} = e^{kx}$$

multipliserar vi båda leden med e^{kx} får vi

$$I' e^{kx} + k e^{kx} I = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(e^{kx} I)' = 0$$

Integrering av båda leden ger

$$I e^{kx} = C \Leftrightarrow I(x) = C e^{-kx}$$

Vi har att $I(0) = I_0$ vilket ger att $C = I_0$

$$\Rightarrow I(x) = I_0 e^{-kx}$$

På en meters djup har vi att $I(1) = 0,4 I_0$

$$\Rightarrow I_0 e^{-k \cdot 1} = 0,4 I_0$$

$$e^{-k} = \frac{2}{5}$$

$$k = -\ln \frac{2}{5}$$

Såxt funktion blir då

$$I(x) = I_0 e^{\ln \frac{2}{5} \cdot x} = I_0 \left(\frac{2}{5}\right)^x$$

6. a) Falskt ty

$$\int_0^{\pi} e^{\sin x} dx > 0 \text{ ty } f(x) = e^{\sin x} \text{ är positiv i integrationsintervallet.}$$

b) Sant, ty

$$F'(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \Rightarrow F \text{ strängt växande.}$$

c) $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \text{konstant}$$

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

Eftersom f konstant antar f bara dessa två värden.

Sant

$$7. e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\ln e = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right) = \left[\frac{1}{x} = t \quad t \rightarrow 0 \right]$$

$$1 = \ln \left(\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} \right)$$

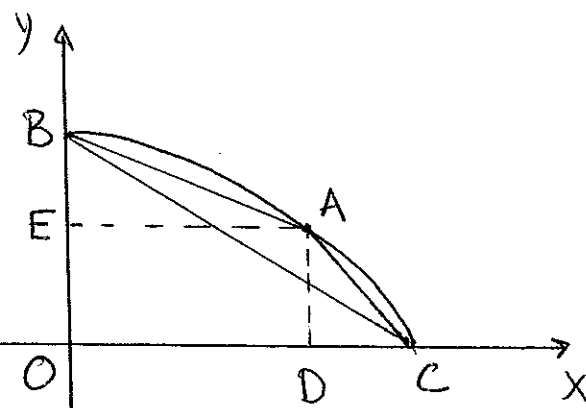
$$1 = \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)^{1/t}$$

$$1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \quad \#$$

8. Rita figur!

Sökt area!

$$\begin{aligned} \text{area}(ABC) &= \text{area}(OBAC) - \text{area}(OBC) \\ &= \text{area}(OEAD) + \text{area}(EBA) + \text{area}(DCA) - \text{area}(OBC). \end{aligned}$$



Med $A = (x, y)$ får vi

$$A = x \cdot y + \frac{x(1-y)}{2} + \frac{(2-x)y}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{x}{2} + y - 1$$

Vi vill uttrycka areafunktionen i en variabel x (eller y) och löser därmed ut y ur

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \text{ och sätter in i uttrycket ovan.}$$

$\Rightarrow$

$$A(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - 1 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 2$$

Derivering av $A(x)$ ger

$$A'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} = 0 \quad \text{då} \quad x = \sqrt{2}$$

Vi får

$$A(0) = 0 \quad A(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \quad A(2) = 0$$

Satsen om största och minsta värde ger att

$$A(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \text{ är största värde}$$