MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola

Tentamen

Datum: 160405 kl. 14.00–18.00

Telefonvakt: Jonny Lindström

0733 607040

LMA400 Matematisk Analys

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från inlämningsuppgifter 2015 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. (a) Formulera analysens huvudsats del 1. (2p)

Lösning:

Se boken.

(b) Låt $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$. Beräkna $f(0)$ och $f'(0)$. (2p)

Lösning:

Eftersom den övre och undre integrationsgränsen är samma, gäller per definition att

$$f(0) = \int_0^0 e^{t^2} dt = 0.$$

Vidare är enligt AHS1 $f'(x) = e^{x^2}$ så $f'(0) = e^{0^2} = 1$.

3. Betrakta kurvorna $y = x^2$ och $y = 4x - 3$.

(a) I vilka punkter skär kurvorna varandra? (1p)

Lösning:

$x^2 = 4x - 3 \iff x = 2 \pm \sqrt{4-3} = 1$ eller 3.

(b) Beräkna arean av det begränsade område som skärs ut av kurvorna. (2p)

Lösning:

För $1 < x < 3$ är $4x - 3 > x^2$ så vi ska beräkna integralen

$$\int_1^3 (4x - 3 - x^2)dx = \left[2x^2 - 3x - x^3/3\right]_1^3 = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 3^3/3 - (2 - 3 - 1/3) = 4/3.$$

(c) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området i föregående uppgift roterar kring y-axeln. (2p)

Lösning: Volymen ges av

$$2\pi \int_1^3 (4x^2 - 3x - x^3)dx = 2\pi[4x^3/3 - 3x^2/2 - x^4/4]_1^3 = \frac{16\pi}{3}.$$

4. Låt $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$.

(a) Ange definitionsområde, eventuella assymptoter, lokala extrempunkter och stationära punkter. (4p)

Lösning:

Definitionsområdet är $(0, \infty)$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to\infty} f(x)/x = 0$ så det finns varken någon vågrät eller sned assymptot. $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ så det finns en lodrät assymptot $x = 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^{3/2}} = \frac{x-1}{2x^{3/2}}$$

så $f'(x)$ är definierad på $(0, \infty)$ och alla lokala extrempunkter är stationära punkter vilket det bara finns en av, nämligen $x = 1$. Vi kan lätt kolla att detta är en lokal minimipunkt.

(b) På vilka intervall är $f(x)$ konvex respektive konkav? (2p)

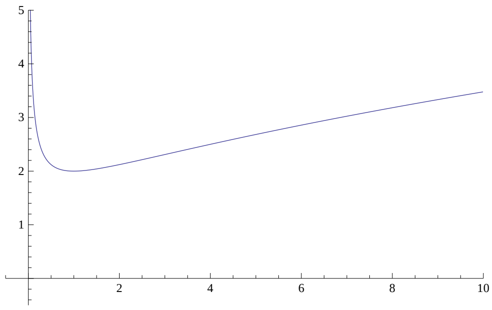
Lösning:

$$f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}} + \frac{3}{4x^{5/2}} = \frac{3-x}{4x^{5/2}}$$

så $f''(x) = 0 \iff x = 3$. Vi kontrollerar att $f''(x) > 0$ om $x < 3$ och $f''(x) < 0$ om $x > 3$ så f är konvex på $(0, 3]$ och konkav på $[3, \infty)$.

(c) Skissa grafen för $f(x)$. (1p)

Lösning:



5. Lös differentialekvationen $x^2y' + 3y' + xy + 2x = 0$ om $y(1) = 1$. (6p)

Lösning:

$$x^2y' + 3y' + xy + 2x = 0 \iff y' + \frac{x}{x^2+3}y = -\frac{2x}{x^2+3}.$$

$\int \frac{x}{x^2+3}dx = \frac{\ln(x^2+3)}{2}$ så integrerande faktor är $e^{\frac{\ln(x^2+3)}{2}} = \sqrt{x^2+3}$. Alltså har vi ekvationen

$$\frac{d}{dx}(y\sqrt{x^2+3}) = \sqrt{x^2+3}y' + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}y = -\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\iff y\sqrt{x^2+3} = \int -\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}dx = 2\sqrt{x^2+3} + C$$

$$\iff y = 2 + \frac{C}{\sqrt{x^2+3}}.$$

$1 = y(1) = 2 + C/\sqrt{1+3} = 2 + C/2 \iff C = -2$. Alltså är $y = 2 - \frac{2}{\sqrt{x^2+3}}$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i}{n}}\,\frac{1}{n} = \frac{2}{3}$. (2p)

Lösning:

Sant: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i}{n}}\,\frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}$.

(b) Funktionen $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, antar bara två värden. (2p)

Lösning:

Sant: $f'(x) = 0$ vilket medför att f är en konstant funktion. $f(1) = \frac{\pi}{2}$ och $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$, vilket visar att f antar två värden.

7. Beräkna $\int \frac{1}{\cos x + \sin 2x} dx$. (4p)

Lösning:

$$\frac{1}{\cos x + \sin 2x} = \frac{1}{(1+2\sin x)\cos x} = \frac{\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin^2 x)}$$

så variabelbytet $\sin x = u$ ger

$$\int \frac{1}{\cos x + \sin 2x} dx = \int \frac{1}{(1+2u)(1+u)(1-u)} du = \int \left(\frac{A}{1+2u} + \frac{B}{1+u} + \frac{C}{1-u} \right) du$$

där

$$\begin{cases} -A - 2B + 2C = 0 \\ B + 3C = 0 \\ A + B + C = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 4/3 \\ B = -1/2 \\ C = 1/6 \end{cases}.$$

Alltså ges integralen i uppgiften av

$$\int \left(\frac{4/3}{1+2u} - \frac{1/2}{1+u} + \frac{1/6}{1-u} \right) du = \frac{2\ln|1+2u|}{3} - \frac{\ln|1+u|}{2} - \frac{\ln|1-u|}{6} + C$$
$$= \frac{2\ln|1+2\sin x|}{3} - \frac{\ln|1+\sin x|}{2} - \frac{\ln|1-\sin x|}{6} + C.$$

8. Låt $f(x) = x^3 + 3x$. Beräkna $\int_0^4 f^{-1}(x)\,dx$. (4p)

Lösning:

$$\int_0^4 f^{-1}(x)\,dx = \int_0^1 t f'(t)\,dt = \int_0^1 t(3t^2+3)\,dt = \frac{9}{4}.$$

Lycka till!
Jonny

Anonym kod	LMA400 Matematisk Analys 160405	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna $\int \arctan(x)dx$. (3p)
Lösning:

Partiell integration ger

$$\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx.$$

Variabelbytet $u = x^2$ gör att den senare integralen kan skrivas som

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}du = \frac{\ln|1+u|}{2} + C = \frac{\ln|1+x^2|}{2} + C.$$

Alltså ges den efterfrågade integralen av $x\arctan(x) - \frac{\ln|1+x^2|}{2} + C$.

(b) Beräkna den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+1}dx$. (3p)
Lösning:

$\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}dx$. Variabelbytet $x - 1 = u$ ger oss den generaliserade integralen $\int_{-1}^0 \frac{1}{u^2}du = \lim_{s\to 0^-}\int_{-1}^s \frac{1}{u^2}du = \lim_{s\to 0^-}[-1/u]_{-1}^s = -(-1/(-1)) + \lim_{s\to 0^-} -1/s = -1$.

(c) Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\ln x)}{\ln x^2}$. (3p)
Lösning:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\ln x)}{\ln x^2} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{2}.$$

(d) Beräkna den obestämda integralen $\int \frac{x+1}{x^2-4}dx$. (3p)
Lösning:

$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ så $\frac{x+1}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-2}$ där $a + b = 0$ och $-2a + 2b = 1$ dvs $a = -1/4$ och $b = 1/4$. Integralen är alltså lika med

$$\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{4}(\ln|x-2| - \ln|x+2|) + C.$$

(e) Hur långt är det kortaste avståndet mellan kurvan $y = x^2$ och punkten $(0,1)$? (4p)
Lösning:

Avståndet ges enligt avståndsformeln av $\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{x^2+(x^2-1)^2} = \sqrt{x^4-x^2+1}$. Eftersom $\sqrt{x}$ växer med x, antas det minsta avståndet för x så att $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ är så litet som möjligt. $f'(x) = 4x^3 - 2x = 0$ om $x = 0$ eller $x = \pm\sqrt{2}$. När $x \to \infty$ så $f(x) \to \infty$ så minimum måste antas i en lokal extrempunkt, dvs i någon av dessa punkter. Vi testar: $f(0) = 1$. $f(\pm 1/\sqrt{2}) = 1/4 - 1/2 + 1 = 3/4$. Alltså antas minimum i $x = \pm 1/\sqrt{2}$ och avståndet är då $\sqrt{3/4} = \sqrt{3}/4$.