

Lösningar till ind. uppg. 5/10 version 1.

1) $\arcsin(\sin v) = v$ om $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$, så

$$\arcsin(\sin e) = \arcsin(\sin(\pi - e)) = \left[\begin{array}{l} e \approx 2,7 \text{ så} \\ \frac{\pi}{2} < e < \pi \text{ så} \\ 0 < \pi - e < \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \underline{\underline{\pi - e}}.$$

2) Låt $f(x) = \frac{8}{4-x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Då är f rationell med $0 \in D_f$ så enligt "direkta substitutions-egenskapen" är $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \frac{8}{4-0} = 2}$.

Vi vet att grafen för $g(x) = 1/x$ har lodrät asymptot i $x=0$.

Grafen för $8g(-x)$ är en "lodrät utdragning" av speglingen i y -axeln av grafen för $g(x)$, så även denna har asymptot i $x=0$.

Grafen för $8g(-(x-4))$ är translationen fyra steg åt höger av grafen för $8g(-x)$ så den har en lodrät asymptot i $\{x=4\}$.

Eftersom $8g(-(x-4)) = \frac{8}{-(x-4)} = \frac{8}{4-x} = f(x)$

följer att även det andra ~~ja~~ kravet är uppfyllt.

2) Alt. lösning: $f(x) = \frac{8}{4-x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$

Låt $0 < \varepsilon < 1$. Om $\delta = \varepsilon$ så betyder $|x-0| < \delta$ att $|x| < \varepsilon$, vilket medför att

$$\begin{aligned} |f(x) - 2| &= \left| \frac{8}{4-x} - 2 \right| = \left| \frac{8 - (8-2x)}{4-x} \right| \\ &= \left| \frac{2x}{4-x} \right| \stackrel{0 < \varepsilon < 1}{<} \left| \frac{2x}{3} \right| < |x| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Eftersom ε var godtyckligt litet har vi visat att

$$\underline{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2}.$$

Låt nu $L > 0$. Om $\delta = \frac{8}{L}$ ~~har~~ $\frac{8}{L} \leq |4-x| < \delta$ är

$$|f(x)| > \left| \frac{8}{4-x} \right| > \frac{8}{\delta} = L.$$

Eftersom L var godtyckligt stort har vi visat att

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \pm \infty$$

dvs grafen för $f(x)$ har en lodrät asymptot i $x=4$.

3 a) Antag att $f(x) = f(y)$ o låt k_1, k_2 vara så att
 $f(x) = k_1 x$ o $f(y) = k_2 y$.

$x < y \Rightarrow k_1 \leq k_2 \Rightarrow f(x) = k_1 x < k_2 y = f(y)$, så
 det funkar inte.

$y < x \Rightarrow k_2 \leq k_1 \Rightarrow f(y) = k_2 y < k_1 x = f(x)$, så det
 funkar inte heller.

Enda möjligheten är alltså att $x = y$. Alltså är
 f injektiv.

b) Värdomängden för f är unionen av alla intervall

$$[(k-1)k, k^2[= \{kx \mid k-1 \leq x < k\}, \quad k=1, 2, \dots$$

Detta är alltså definitionsmängden för f^{-1} .

Antag $y \in [(k-1)k, k^2[$ för något k som ovan.

$$y = f(x) = kx \Rightarrow f^{-1}(y) = x = \frac{y}{k}, \quad \text{så}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{k} \quad \text{för } y \in [(k-1)k, k^2[$$

($f^{-1}(y)$ ej def. för $y \in [k^2, k(k+1)[$.)