Dugga i LMA515a variant A 2016-09-21

1. Lös olikheten $|x - \frac{1}{2}| < x^2 - x - \frac{7}{2}$.

   Lösning: $|x - \frac{1}{2}| = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{om } x \geq \frac{1}{2} \\ -x + \frac{1}{2} & \text{om } x < \frac{1}{2} \end{cases}$, så vi får två fall.

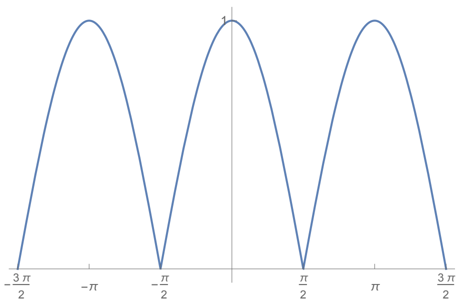
   Om $x \geq \frac{1}{2}$ blir olikheten $x - \frac{1}{2} < x^2 - x - \frac{7}{2} \Leftrightarrow 0 < x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 1 - 3 = (x-1)^2 - 2^2 = (x-1-2)(x-1+2) = (x-3)(x+1)$. Detta är positivt om $x < -1$ eller $x > 3$ (teckentabell hjälper), men $x < -1$ uppfyller inte villkoret $x \geq \frac{1}{2}$, så endast $x > 3$ kommer med.

   Om $x < \frac{1}{2}$ blir olikheten $-x + \frac{1}{2} < x^2 - x - \frac{7}{2} \Leftrightarrow 0 < x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$. Detta är positivt om $x < -2$ eller $x > 2$, men $x > 2$ uppfyller inte villkoret $x < \frac{1}{2}$, så endast $x < -2$ kommer med.

   Totalt får vi att olikheten är uppfylld för $x \in]-\infty, -2[\cup]3, \infty[$.

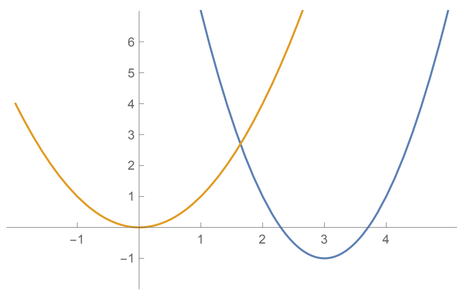
2. Låt $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = 1 - x^2$ och $h(x) = \sqrt{x}$. Vad är den naturliga definitionsmängden (domain) för $h \circ g \circ f$? Förenkla $h \circ g \circ f$ så långt som möjligt och skissa grafen.

   Lösning: $(h \circ g \circ f)(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$. Vi har att $-1 \leq f(x) \leq 1$ som ger $0 \leq g(f(x)) \leq 1$. Så vi kan inte få negativa tal under rot-tecknet. Därför blir den naturliga definitionsmängden för $h \circ g \circ f$ hela $\mathbb{R}$.
   Funktionen kan förenklas $(h \circ g \circ f)(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} = \sqrt{\cos^2(x)} = |\cos(x)|$.
   På intervallen $-3\pi/2 < x < -\pi/2$ och $\pi/2 < x < 3\pi/2$ är $\cos(x)$ negativ så där ritar vi $-\cos(x)$. I intervallet $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ blir funktionen $\cos(x)$. Alltså får vi grafen



3. Låt $f(x) = 2x^2 - 12x + 17$. Beskriv grafen $y = f(x)$ med hjälp av translationer och skalningar av grafen $y = x^2$.

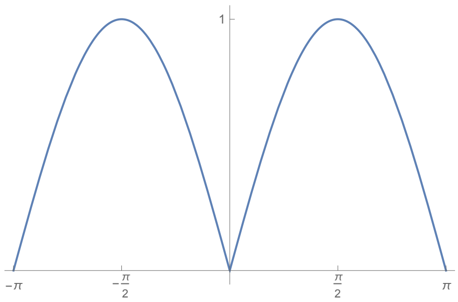
   Lösning: Kvadratkomplettering ger $f(x) = 2x^2 - 12x + 17 = 2(x^2 - 6x) + 17 = 2((x-3)^2 - 3^2) + 17 = 2(x-3)^2 - 18 + 17 = 2(x-3)^2 - 1$. Därför är grafen $y = f(x)$ grafen $y = x^2$ vertikalt skalad med en faktor 2 följt av en translation åt höger 3 steg och 1 steg nedåt.



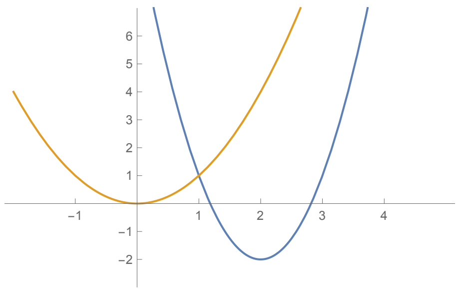
Dugga i LMA515a variant B 2016-09-21

1. Låt $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = 1 - x^2$ och $h(x) = \sqrt{x}$. Vad är den naturliga definitionsmängden (domain) för $h \circ g \circ f$? Förenkla $h \circ g \circ f$ så långt som möjligt och skissa grafen.
Lösning: $(h \circ g \circ f)(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$. Vi har att $-1 \leq f(x) \leq 1$ som ger $0 \leq g(f(x)) \leq 1$. Så vi kan inte få negativa tal under rot-tecknet. Därför blir den naturliga definitionsmängden för $h \circ g \circ f$ hela $\mathbb{R}$.

   Funktionen kan förenklas $(h \circ g \circ f)(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)} = \sqrt{\sin^2(x)} = |\sin(x)|$.
På intervallet $-\pi < x < 0$ är $\sin(x)$ negativ så där ritar vi $-\sin(x)$. I intervallet $0 \leq x \leq \pi$ blir funktionen $\sin(x)$. Alltså får vi grafen



2. Låt $f(x) = 3x^2 - 12x + 10$. Beskriv grafen $y = f(x)$ med hjälp av translationer och skalningar av grafen $y = x^2$.
Lösning: Kvadratkomplettering ger $f(x) = 3x^2 - 12x + 10 = 3(x^2 - 4x) + 17 = 3((x-2)^2 - 2^2) + 10 = 3(x-2)^2 - 12 + 10 = 3(x-2)^2 - 2$. Därför är grafen $y = f(x)$ grafen $y = x^2$ vertikalt skalad med en faktor 3 följt av en translation åt höger 2 steg och 2 steg nedåt.



3. Lös olikheten $|x + \frac{1}{2}| < x^2 + x - \frac{7}{2}$.
Lösning: $|x + \frac{1}{2}| = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{om } x \geq -\frac{1}{2} \\ -x - \frac{1}{2} & \text{om } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$, så vi får två fall.
Om $x \geq -\frac{1}{2}$ blir olikheten $x + \frac{1}{2} < x^2 + x - \frac{7}{2} \Leftrightarrow 0 < x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$. Detta är positivt om $x < -2$ eller $x > 2$ (teckentabell hjälper), men $x < -2$ uppfyller inte villkoret $x \geq -\frac{1}{2}$, så endast $x > 2$ kommer med.

   Om $x < -\frac{1}{2}$ blir olikheten $-x - \frac{1}{2} < x^2 + x - \frac{7}{2} \Leftrightarrow 0 < x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 1 - 3 = (x+1)^2 - 2^2 = (x+1-2)(x+1+2) = (x-1)(x+3)$. Detta är positivt om $x < -3$ eller $x > 1$, men $x > 1$ uppfyller inte villkoret $x < -\frac{1}{2}$, så endast $x < -3$ kommer med.

   Totalt får vi att olikheten är uppfylld för $x \in]-\infty, -3[\cup]2, \infty[$.