Namn: Person nr:

Lösningsförslag till Dugga i LMA515a variant A 2016-10-05

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{-x^2+x+2}$.
Lösning: $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{-x^2+x+2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-6}{-((x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-2)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x+\frac{1}{2})^2-(\frac{5}{2})^2}{-((x-\frac{1}{2})^2-(\frac{3}{2})^2)} =$ $\lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+3)}{-(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{x+3}{-(x+1)} = \dfrac{2+3}{-(2+1)} = -\dfrac{5}{3}$.

2. Låt $f(x) = e^{\left(\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-2\ln(x)\right)}$. Bestäm definitionsmängden D_f och förenkla uttrycket så långt som möjligt.
Lösning: För att $\ln(x-1)$ och $\ln(x)$ ska vara definierade krävs $x-1>0$ respektive $x>0$. Övriga funktionssteg ger inga extra begränsningar, så $D_f =]1,\infty[$. Logaritmregler ger $f(x) = e^{\left(\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-2\ln(x)\right)} = e^{\left(\ln(2)+\ln\sqrt{x-1}-\ln(x^2)\right)} = e^{\ln\left(\frac{2\sqrt{x-1}}{x^2}\right)} = \dfrac{2\sqrt{x-1}}{x^2}$.

3. Förenkla uttrycket $\sin\big(3\pi+\arccos(x)\big)$ så långt som möjligt.
Lösning: Additionsformeln för sin ger $\sin\big(3\pi+\arccos(x)\big) = \sin(3\pi)\cos\big(\arccos(x)\big) + \cos(3\pi)\sin\big(\arccos(x)\big) = -\sin\big(\arccos(x)\big)$. Låt $y = \sin\big(\arccos(x)\big)$, då blir $y^2 = \sin^2\big(\arccos(x)\big) = 1-\cos^2\big(\arccos(x)\big) = 1-x^2$. Dessutom är $0 \le \arccos(x) \le \pi$, så $y = \sin\big(\arccos(x)\big) \ge 0$. Alltså får vi $y = \sqrt{1-x^2}$ vilket ger $\sin\big(3\pi+\arccos(x)\big) = -\sqrt{1-x^2}$.

Lösningsförslag till Dugga i LMA515a variant B 2016-10-05

1. Låt $f(x) = e^{\left(\ln(3)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+2\ln(x)\right)}$. Bestäm definitionsmängden D_f och förenkla uttrycket så långt som möjligt.
Lösning: För att $\ln(x+1)$ och $\ln(x)$ ska vara definierade krävs $x+1>0$ respektive $x>0$. Övriga funktionssteg ger inga extra begränsningar, så $D_f =]0,\infty[$. Logaritmregler ger $f(x) = e^{\left(\ln(3)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+2\ln(x)\right)} = e^{\left(\ln(3)-\ln\sqrt{x+1}+\ln(x^2)\right)} = e^{\ln\left(\frac{3x^2}{\sqrt{x+1}}\right)} = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x+1}}$.

2. Förenkla uttrycket $\cos\big(-3\pi+\arcsin(x)\big)$ så långt som möjligt.
Lösning: Additionsformeln för cos ger $\cos\big(-3\pi+\arcsin(x)\big) = \cos(-3\pi)\cos\big(\arcsin(x)\big) - \sin(-3\pi)\sin\big(\arcsin(x)\big) = -\cos\big(\arcsin(x)\big)$. Låt $y = \cos\big(\arcsin(x)\big)$, då blir $y^2 = \cos^2\big(\arcsin(x)\big) = 1-\sin^2\big(\arcsin(x)\big) = 1-x^2$. Dessutom är $-\pi/2 \le \arcsin(x) \le \pi/2$, så $y = \cos\big(\arcsin(x)\big) \ge 0$. Alltså får vi $y = \sqrt{1-x^2}$ vilket ger $\cos\big(-3\pi+\arcsin(x)\big) = -\sqrt{1-x^2}$.

3. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{-x^2+2x+3}$.
Lösning: $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{-x^2+2x+3} = \lim_{x\to 3} \dfrac{(x-2)^2-4+3}{-((x-1)^2-1-3)} = \lim_{x\to 3} \dfrac{(x-2)^2-1^2}{-((x-1)^2-2^2)} =$ $\lim_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x-1)}{-(x-3)(x+1)} = \lim_{x\to 3} \dfrac{x-1}{-(x+1)} = \dfrac{3-1}{-(3+1)} = -\dfrac{1}{2}$.