MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2016-10-25 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Thomas Bäckdahl

Lösningsförslag **LMA515 Matematik del a KI1**

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2016 räknas med i första delen. För betyg 4 resp. 5 krävs 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (13p)

2. För vilka x gäller olikheten $-2x^2 + 2x + 12 > 0$? (3p)
Lösning: $0 < -2x^2+2x+12 = -2(x^2-x-6) = -2((x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-6) = -2((x-\frac{1}{2})^2-\frac{5^2}{2^2}) = -2(x-\frac{1}{2}-\frac{5}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}) = -2(x-3)(x+2)$. Teckentabell:

x		-2		3	
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-2(x-3)(x+2)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Svar: Olikheten gäller för $-2 < x < 3$.

3. (a) Formulera faktorsatsen. (1p)
Svar: Låt $p(x)$ vara ett polynom. Då är $p(b) = 0$ om och endast om $p(x)$ har en faktor $(x-p)$.

(b) Använd faktorsatsen för att faktorisera $p(x) = x^3-3x^2-4x+12$ så långt som möjligt. Tips: $p(3) = 0$. (3p)
Lösning: Faktorsatsen ger att $p(x)$ har en faktor $(x-3)$. Polynomdivision ger $p(x) = (x-3)(x^2-4)$ och konjungatregeln ger $(x^2-4) = (x-2)(x+2)$.
Svar: $p(x) = (x-3)(x-2)(x+2)$.

4. Beräkna följande gränsvärde. (4p)

$$\lim_{x\to 2} \arcsin\Big(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\Big).$$

Lösning: arcsin är kontunierlig på sin definitionsmängd, så

$$\lim_{x\to 2} \arcsin\Big(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\Big) = \arcsin\Big(\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\Big) = \arcsin\Big(\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}\Big)$$
$$= \arcsin\Big(\lim_{x\to 2}\frac{(x-1-1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}\Big) = \arcsin\Big(\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\Big) = \arcsin\Big(\frac{1}{\sqrt{2-1}+1}\Big)$$
$$= \arcsin\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{\pi}{6}.$$

5. Ange en ekvation för tangentlinjen till kurvan $y = \sqrt{2x}\cos(\frac{\pi}{4}x)$ i punkten $(2, 0)$. (4p)

Lösning: Produktregeln ger $y'(x) = \sqrt{2}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})\cos(\frac{\pi}{4}x) + \sqrt{2}\sqrt{x}\frac{d}{dx}\big(\cos(\frac{\pi}{4}x)\big) = \sqrt{2}\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\frac{\pi}{4}x) + \sqrt{2}\sqrt{x}\big(-\sin(\frac{\pi}{4}x)\big)\frac{d}{dx}(\frac{\pi}{4}x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}\cos(\frac{\pi}{4}x) - \sqrt{2x}\sin(\frac{\pi}{4}x)\frac{\pi}{4}$. Så $k = y'(2) = \frac{1}{\sqrt{4}}\cos(\frac{\pi}{2}) - \sqrt{4}\sin(\frac{\pi}{2})\frac{\pi}{4} = -2\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$. Tangentlinjen genom $(2, 0)$ blir då $y = k(x-2) + 0 = -\frac{\pi}{2}(x-2)$.

6. Positionen vid tiden t av ett föremål ges av $s(t) = \ln(3 + t^2)$.

(a) Välj funktioner f och g så att $s(t) = (f \circ g)(t)$. (1p)
Svar: $f(u) = \ln(u)$ och $g(t) = 3 + t^2$.

(b) Vad är föremålets acceleration vid tiden $t = 1$? (3p)
Lösning: $s'(t) = f'(g(t))g'(t) = \frac{2t}{3+t^2}$, $s''(t) = \frac{2(3+t^2) - 2t2t}{(3+t^2)^2} = \frac{2(3-t^2)}{(3+t^2)^2}$.
Svar: $s''(1) = \frac{1}{4}$.

(c) Finns det någon tid $t > 0$ då accelerationen är 0? Ange i så fall denna tid. (2p)
Lösning: Ja, $s''(t)$ innehåller faktorn $(3 - t^2)$ så $s''(\sqrt{3}) = 0$. Dvs vid $t = \sqrt{3}$ är accelerationen 0.

7. Bestäm alla horisontella och vertikala asymptoter till grafen $y = \frac{x\sqrt{x^2+3}}{x^2 - 2x + 1}$. (4p)

Lösning: Låt $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+3}}{x^2-2x+1} = \frac{x\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}$. Vi får division med noll då $x = 1$. Så vi undersöker $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}(x\sqrt{x^2+3})\lim_{x\to1}(x-1)^{-2} = 2\lim_{x\to1}(x-1)^{-2} = \infty$. Vi får alltså en vertikal asymptot i $x = 1$. För horisontella asymptoter skriver vi om $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2(1+3x^{-2})}}{x^2(1-x^{-1})^2} = \frac{|x|\sqrt{1+3x^{-2}}}{x(1-x^{-1})^2}$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+3x^{-2}}}{x(1-x^{-1})^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+3x^{-2}}}{(1-x^{-1})^2} = \frac{\sqrt{1+0}}{(1-0)^2} = 1$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+3x^{-2}}}{x(1-x^{-1})^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+3x^{-2}}}{(1-x^{-1})^2} = \frac{-\sqrt{1+0}}{(1-0)^2} = -1$. Alltså får vi horisontella asymptoter $y = 1$ och $y = -1$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

8. Använd derivatans definition för att beräkna $\frac{d}{dx}(x^{1/3})$. (4p)

Tips: $(a^{1/3} - b^{1/3})(a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}) = a - b$.

Lösning: Med $a = x + h$ och $b = x$ får vi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^{1/3}) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{1/3} - x^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{((x+h)^{1/3} - x^{1/3})((x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3})}{h((x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h((x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \\
&= \frac{1}{(x+0)^{2/3} + (x+0)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \tfrac{1}{3}x^{-2/3}.
\end{aligned}$$

9. Låt

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x} & \text{om } x > 2 \\ x^2 - 2 & \text{om } x < 2 \\ a & \text{om } x = 2. \end{cases}$$

(a) Finns det något tal a så att $f(x)$ är kontinuerlig i $x = 2$? (2p)

Lösning: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 - 2 = 2^2 - 2 = 2$ och $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{4}{x} = \frac{4}{2} = 2$, så om vi väljer $a = 2$ får vi kontinutiet i $x = 2$, dvs $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 2$.

(b) Finns det något tal a så att $f(x)$ är deriverbar (differentiable) i $x = 2$? (2p)

Lösning: Deriverbarhet implicerar kontinuitet, så enda möjligheten är $a = 2$. Då $f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ undersöker vi vänster och höger gränsvärde

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - 2 - (2^2 - 2)}{x - 2} = \frac{d}{dx}(x^2 - 2)\Big|_{x=2} = (2x)\Big|_{x=2} = 4,$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{4}{x} - \frac{4}{2}}{x - 2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x}\right)\Big|_{x=2} = \left(\frac{-4}{x^2}\right)\Big|_{x=2} = -1.$$

Dessa är olika, så $f'(2)$ existerar inte.

10. Bestäm lutningen av tangenten till kurvan som ges av $y^3 + x^2 + 2xy = 0$ i punkten där kurvan skär $y = 1$. (4p)

Lösning: Implicit derivering ger $0 = \frac{d}{dx}(y^3 + x^2 + 2xy) = 3y^2\frac{dy}{dx} + 2x + 2y + 2x\frac{dy}{dx}$. Lös ut $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 2y}{3y^2 + 2x}$. Sätter vi in $y = 1$ i $0 = y^3 + x^2 + 2xy$ får vi $0 = 1 + x^2 + 2x = (x+1)^2$. Alltså är $x = -1$ i då $y = 1$. I punkten $(-1, 1)$ får vi $\frac{dy}{dx} = \frac{2-2}{3-2} = 0$. Alltså blir lutningen 0 och tangentlinjen blir således $y = 1$.

Hoppas det gick bra!
Thomas Bäckdahl

Anonym kod	LMA515 Matematik del a KI1 2016-10-25	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Finn alla lösningar till ekvationen $|1-2x|-3x+4=0$. **Lösning:** Om $1-2x \geq 0$ blir ekvationen $0 = 1-2x-3x+4 = 5-5x = 5(x-1)$ som har lösningen $x = 1$, men den uppfyller inte $1-2x \geq 0$. Om $1-2x < 0$ blir ekvationen $0 = -(1-2x)-3x+4 = -x+3$ som har lösning $x = 3$ som uppfyller $1-2x < 0$. (3p)

Svar: $x = 3$.

(b) Antag att $f(x) = 4x^2+2x-1$ och att grafen till $g(x)$ fås genom att horisontellt skala grafen till $f(x)$ med faktor 2 (sträckning) och flytta den 3 steg nedåt.
Bestäm ett uttryck för $g(x)$. (3p)

Svar: $g(x) = f(x/2) - 3 = 4(x/2)^2 + 2(x/2) - 1 - 3 = x^2 + x - 4$.

(c) Förenkla $\ln(x^2 + 4x + 4) - 2\ln((x + 2)e^x)$. (3p)

Svar: $\ln(x^2 + 4x + 4) - 2\ln((x + 2)e^x) = \ln((x + 2)^2) - 2\ln(x + 2) - 2\ln(e^x) = 2\ln(x + 2) - 2\ln(x + 2) - 2x = -2x$.

(d) Beräkna inversen f^{-1} av $f(x) = 2 + (e^x)^3$ och ange definitionsmängd (domain) och värdemängd (range) för f^{-1} . (4p)

Lösning: $y = f(x) = 2 + (e^x)^3 = 2 + e^{3x} \Leftrightarrow y - 2 = e^{3x} \Leftrightarrow \ln(y - 2) = 3x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x = \dfrac{1}{3}\ln(y - 2)$.

Svar: $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}\ln(x - 2)$, $D_{f^{-1}} =]2, \infty[$ och $V_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$.