MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2016-12-21 kl. 14.00 - 18.00

Lösningsförslag Telefonvakt: Robert Forslund

ankn 5325

LMA515 Matematik del a för KI1 och LMA033 Matematik för BI1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2016 räknas med i första delen. För betyg 4 resp. 5 krävs 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (13p)

2. Skriv $\dfrac{x^3+2x-2}{x-1}$ på formen $q(x)+\dfrac{r(x)}{g(x)}$, där $q(x)$, $r(x)$ och $g(x)$ är polynom och graden av $r(x)$ är lägre än graden av $g(x)$. (3p)

Svar: $\dfrac{x^3+2x-2}{x-1} = x^2+x+3+\dfrac{1}{x-1}$.

3. (a) Bestäm ekvationen för tangentlinjen L_1 till $y=f(x)=\dfrac{2}{x}$ i $x=2$. (2p)

Lösning: $f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}$ så tangentens lutning blir $f'(2)=-\dfrac{1}{2}$. Ekvation för tangentlinjen L_1 blir då $y=f(2)+f'(2)(x-2)=1-\dfrac{1}{2}(x-2)=2-\dfrac{x}{2}$.

(b) Bestäm ekvationen för linjen L_2 som går genom tangeringspunkten men är vinkelrät mot tangentlinjen L_1. (2p)

Lösning: Låt k vara lutningen för L_2. L_2 är vinkelrät mot L_1 om $kf'(2)=-1$, vilket ger $k=\dfrac{-1}{-1/2}=2$. Ekvation för linjen L_2 blir då $y=f(2)+k(x-2)=1+2(x-2)=2x-3$.

4. Beräkna följande gränsvärde. (4p)

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{3}{x-1}-\frac{2x+10}{x^2+2x-3}}.$$

Lösning: Faktorisering ger $x^2+2x-3=(x+1)^2-4=(x-1)(x+3)$ så vi får

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{3}{x-1}-\frac{2x+10}{x^2+2x-3}} = \lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{3}{x-1}-\frac{2x+10}{(x-1)(x+3)}} = \lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{3(x+3)-(2x+10)}{(x-1)(x+3)}}$$

$$= \lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x-1}{(x-1)(x+3)}} = \lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{1}{x+3}} = \sqrt{\frac{1}{1+3}} = \frac{1}{2}$$

5. Bestäm derivatan av $f(x) = \ln(\cos^2 x)$ och förenkla så långt som möjligt. (4p)
Lösning:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\frac{d}{dx}(\cos^2 x) = \frac{2\cos x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{-2\sin x}{\cos x} = -2\tan x$$

6. Positionen vid tiden t av ett föremål ges av $s(t) = \dfrac{t^4}{6} - 2t^3 + 8t^2 + 1$. Bestäm alla tidpunkter då föremålets acceleration är noll. (4p)
Lösning:

$$s'(t) = \frac{2t^3}{3} - 6t^2 + 16t$$
$$s''(t) = 2t^2 - 12t + 16 = 2(t^2 - 6t + 8) = 2((t-3)^2 - 1) = 2(t-4)(t-2)$$

Alltså är accelerationen noll vid tidpunkterna $t = 2$ och $t = 4$.

7. Bestäm alla horisontella och vertikala asymptoter till graferna

(a) $y = \dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$. (3p)

Lösning: På grund av $|\sin(x-2)| \le 1$ och $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0$ ger instängningssatsen $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 0$ så $y = 0$ är horisontell asymptot. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = /t = x-2/ = \lim_{x\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ enligt standardgränsvärde. Alltså finns ingen vertikal asymptot i $x = 2$.

(b) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-3}$. (3p)

Lösning: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+x^{-2}}}{x(1-3x^{-1})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+x^{-2}}}{(1-3x^{-1})} = \frac{-\sqrt{1+0}}{(1-0)} = -1.$

På samma sätt $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^{-2}}}{(1-3x^{-1})} = \frac{\sqrt{1+0}}{(1-0)} = 1$. Vi har därför horisontella asymptoter i $y = -1$ och $y = 1$. $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-3} = \infty$ och $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-3} = -\infty$ ger vertikal symptot i $x = 3$.

Del 2: Överbetygsdelen

8. Formulera och bevisa produktregeln för derivator genom att använda derivatans definition. (4p)
Lösning: $\dfrac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Bevis

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)\lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x)g'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

på grund av att existensen av $g'(x)$ ger att g är kontinuerlig i punkten x.

9. (a) Formulera definitionen för kontinuitet av en funktion i en inre punkt av dess definitionsmängd. (2p)

Lösning: $f(x)$ är kontinuerlig i $x = a$ om $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(b) Betrakta funktionen $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$ som är odefinierad i $x = 0$. Kan man definiera något värde $f(0) = C$ så att $f(x)$ blir kontinuerlig i $x = 0$? (2p)

Lösning:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2-1}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{1}{2}$$

Så $f(x)$ är kontunuerlig i $x = 0$ om man definierar $f(0) = \frac{1}{2}$.

10. Bestäm derivatan till funtionen $f(x) = 3\arcsin(x)$ genom att använda implicit derivering. (4p)

Lösning: $y = 3\arcsin x$ ger $x = \sin\left(\frac{y}{3}\right)$ och $-\frac{\pi}{2} \le \frac{y}{3} \le \frac{\pi}{2}$.

Implicit derivering ger $1 = \frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{y}{3}\right) = \cos\left(\frac{y}{3}\right)\frac{y'}{3}$ så $y' = \dfrac{3}{\cos(y/3)}$.

Vi har $\cos^2\left(\frac{y}{3}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{y}{3}\right) = 1 - x^2$ och $\cos\left(\frac{y}{3}\right) \ge 0$ då $-\frac{\pi}{2} \le \frac{y}{3} \le \frac{\pi}{2}$.

Alltså får vi $\cos\left(\frac{y}{3}\right) = \sqrt{1-x^2}$ och därmed $y' = \dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$.

Hoppas det gick bra.

Thomas Bäckdahl

Anonym kod	LMA515 Matematik del a för KI1 och LMA033 Matematik för BI1	2016-12-21	sid.nummer **1**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Lös olikheten $|2x+3| \leq 4$. (3p)
Lösning: $|2x+3| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq 2x+3 \leq 4 \Leftrightarrow -7 \leq 2x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$
Svar: $x \in \left[-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

(b) Använd kvadratkomplettering för att bestämma värdemängden (range) för funktionen $f(x) = x^2 + 4x + 1$. (3p)
Lösning: $f(x) = x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 - 2^2 + 1 = (x+2)^2 - 3$. Minsta värdet är därför $f(-2) = -3$. f är kontinuerlig och $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ så vi får $V_f = [-3, \infty[$.
Svar: $V_f = [-3, \infty[$.

(c) Beräkna inversen f^{-1} av $f(x) = 3 + \sqrt{2-x}$ och ange definitionsmängd (domain) och värdemängd (range) för f^{-1} . (4p)
Lösning: $f(x)$ är definierad för $2 - x \geq 0$ så $V_{f^{-1}} = D_f =]-\infty, 2]$. $y = 3 + \sqrt{2-x} \Leftrightarrow y - 3 = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow (y-3)^2 = 2 - x$ och $y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x = 2 - (y-3)^2$ och $y \geq 3$ så $f^{-1}(x) = 2 - (x-3)^2$ med $D_{f^{-1}} = [3, \infty[$.
Svar: $f^{-1}(x) = 2 - (x-3)^2$, $D_{f^{-1}} = [3, \infty[$ och $V_{f^{-1}} =]-\infty, 2]$.

(d) Förenkla $\ln(x^2 + x - 2) - \ln\left(\dfrac{x-1}{2x+4}\right) - 2\ln(x+2)$. (3p)
Lösning: Faktorisering ger $x^2 + x - 2 = (x + \frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 = (x-1)(x+2)$. Så $\ln(x^2+x-2) - \ln\left(\dfrac{x-1}{2x+4}\right) - 2\ln(x+2) = \ln((x-1)(x+2)) - \ln\left(\dfrac{x-1}{2(x+2)}\right) - 2\ln(x+2) = \ln(x-1) + \ln(x+2) - \ln(x-1) + \ln(2) + \ln(x+2) - 2\ln(x+2) = \ln(2)$
Svar: $\ln(2)$.