MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 2015-10-27 kl. 08.30–12.30

Tentamen | Telefonvakt: Petter Johansson

0728 776580

LMA515 Matematik KI1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 23 poäng. För betyg 4 resp. 5 krävs 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. (a) Formulera faktorsatsen. (1p)

Lösning: Om p är ett polynom och a ett tal för vilket $p(a) = 0$, så finns ett polynom q sådant att $p(x) = (x - a)q(x)$.

(b) Använd faktorsatsen för att faktorisera $p(x) = x^3 + 7x^2 + 2x + 14$ så långt som möjligt. Tips: $p(-7) = 0$. (3p)

Lösning: Enligt faktorsatsen är $p(x) = (x + 7)q(x)$ för något polynom q. Med exempelvis polynomdivision kan man se att $q(x) = x^2 + 2$. Detta polynom saknar nollställen och kan alltså enligt faktorsatsen inte faktoriseras. Alltså är svaret $p(x) = (x + 7)(x^2 + 2)$.

3. Kurvan $y = x^3 - 3x + 1$ har en tangent i punkten $(0, 1)$ och en annan tangent i punkten $(2, 3)$. Bestäm den punkt i planet där de båda tangenterna skär varandra. (4p)

Lösning: y som funktion av x har derivata $y'(x) = 3x^2 - 3$. Tangenten i $(0, 1)$ har därför lutning $y'(0) = -3$. Vi ansätter ekvationen $y = -3x + m$ och konstaterar att $1 = -3 \cdot 0 + m \iff m = 1$. Tangenten i $(2, 3)$ har lutning $y'(2) = 9$. Vi ansätter ekvationen $y = 9x + m$ och konstaterar att $3 = 9 \cdot 2 + m \iff m = -15$. Skärningspunkten mellan tangenterna är lösningen till systemet

$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = 9x - 15 \end{cases} \iff \begin{cases} 9x - 15 = -3x + 1 \\ y = 9x - 15 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 16/12 = 4/3 \\ y = 9(4/3) - 15 = -3. \end{cases}$$

4. Låt $h(x) = \sin e^x - e^{-x} + 1$.

(a) Om $g(x) = e^x$, bestäm $f(y)$ så att $h(x) = f \circ g(x)$. (2p)

Lösning: $f(y) = \sin y - \frac{1}{y} + 1 \Rightarrow f \circ g(x) = \sin e^x - \frac{1}{e^x} + 1 = h(x)$.

(b) Bestäm $h'(x)$. (2p)

Lösning: Kedjeregeln ger

$$h'(x) = \frac{d}{dx} f \circ g(x) = f'(g(x))g'(x) = \left(\cos e^x + \frac{1}{(e^x)^2} \right) e^x = e^x \cos e^x + e^{-x}.$$

.

5. Ange eventuella lodräta och vågräta assymptoter till graferna för $f(x) = \frac{\arctan x}{\ln x}$ och $g(x) = \frac{2x}{x^2+x-1}$. (3p)

Lösning: f är definierad på $]0,1[$ och $]1,\infty[$ och $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ då täljaren går mot noll men inte nämnaren, medan $\lim_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$ eftersom täljaren, men inte nämnaren, är nollskiljd då $x = 1$. Alltså har f endast den lodräta assymptoten $x = 1$. Dessutom är $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ eftersom nämnaren går mot oändligheten medan täljaren går mot $\pi/2$. Alltså har grafen för f den vågräta assymptoten $y = 0$.

g är definierad närhelst nämnaren är nollskiljd. Nämnaren är noll för $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ och där är täljaren nollskiljd vilket medför att g har lodräta assymptoter där. Eftersom nämnaren är ett andragradspolynom medan täljaren är ett förstagradspolynom, är $\lim_{\pm\infty} g(x) = 0$ och g:s graf har den vågräta assymptoten $y = 0$.

6. Derivera uttrycket $y = \ln\left(\ln\sqrt{e^x}\right)$ med avseende på x. (3p)

Lösning:

$$\ln\left(\ln\sqrt{e^x}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\ln(e^x)\right) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2,$$

så

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

7. En bil har efter t sekunder kört $s(t) = te^{\sin t}$ meter.

(a) Vad är bilens hastighet vid tiden $t = 0$? (2p)

Lösning: Hastigheten ges av derivatan:

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = e^{\sin t} + t\cos t e^{\sin t}.$$

Alltså, $v(0) = e^0 + 0 = 1\ m/s$.

(b) Vad är bilens acceleration vid tiden $t = \pi$? (2p)

Lösning: Accelerationen ges av derivatan av hastigheten:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\sin t} + t\cos t e^{\sin t}\right) = \cos t e^{\sin t} + \cos t e^{\sin t} - t\sin t e^{\sin t} + t\cos^2 t e^{\sin t}.$$

Alltså, $a(\pi) = -1 - 1 - 0 + \pi = \pi - 2\ m/s^2$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

8. (a) Ge den matematiska definitionen av gränsvärdet av en funktion $f(x)$ då x går mot $a \in \mathbb{R}$. (2p)

Lösning:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

om det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $|x - a| < \delta$ och $x \neq a$ implicerar att $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(b) Använd definitionen av gränsvärde för att visa att (2p)

$$\lim_{x \to 1} 2x = 2.$$

Lösning: Antag att $\varepsilon > 0$. Låt $\delta = \varepsilon/2$.

$$|1 - x| < \delta \Rightarrow |2 - f(x)| = |2 - 2x| = 2|1 - x| < 2\delta = \varepsilon.$$

Eftersom vi valde ε godtyckligt litet följer det önskade resultatet.

9. (a) För vilket kubiskt polynom p gäller $p(-2) = p(-1) = p(5) = 0$ och $p(0) = 4$? (2p)

Lösning: Enligt faktorsatsen och de första likheterna är $p(x) = c(x+2)(x+1)(x-5)$ för något $c \in \mathbb{R}$. Enligt det sista villkoret är $4 = p(0) = c \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-5) = -10c \iff c = -\frac{2}{5}$, dvs $p(x) = -\frac{2}{5}(x+2)(x+1)(x-5)$.

(b) Bestäm $a > 0$ så att (2p)

$$f(x) = \begin{cases} x^3, x < a \\ 1 + \ln x, x \geq a \end{cases}$$

blir kontinuerlig.

Lösning: f blir kontinuerlig om och endast om vi väljer a så att $a^3 = 1 + \ln a$. Eftersom funktionerna båda är strikt växande den enda lösningen till denna ekvation är $a = 1$.

10. Bestäm lutningen för tangentlinjen till ellipsen (4p)

$$x^2 + 2y^2 + 2x - 2y = 4$$

i den punkt där ellipsen korsar den positiva delen av x-axeln.

Lösning: Implicit differentiering med avseende på x ger

$$2x + 4yy' + 2 - 2y' = 0 \iff y' = \frac{-2x - 2}{4y - 2} = \frac{1 + x}{1 - 2y}.$$

Ellipsen skär x-axeln för x så att $x^2 + 2x = 4$ dvs $x = -1 \pm \sqrt{5}$, så den eftersökta lutningen ges av

$$y'(-1 + \sqrt{5}) = \frac{1 + (-1 + \sqrt{5})}{1 - 2 \cdot 0} = \sqrt{5}.$$

Lycka till!
Petter Johansson

Anonym kod	LMA515 Matematik KI1 2015-10-27	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Använd binomialsatsen för att skriva polynomet $p(x) = (2x^2 - 1)^5$ på grundform. (3p)

Lösning: Binomialsatsen ger

$$
\begin{aligned}
(2x^2-1)^5 =& (2x^2)^5 + 5(2x^2)^4(-1) + 10(2x^2)^3(-1)^2 + 10(2x^2)^2(-1)^3 + 5(2x^2)(-1)^4 + (-1)^5 \\
=& 32x^{10} - 5\cdot 16x^8 + 10\cdot 8x^6 - 10\cdot 4x^4 + 5\cdot 2x^2 - 1 \\
=& 32x^{10} - 80x^8 + 80x^6 - 40x^4 + 10x^2 - 1.
\end{aligned}
$$

(b) Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = \frac{\arctan x}{\tan x}$. Förenkla så långt som möjligt. (3p)

Lösning:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{\tan x}{1+x^2} - \frac{\arctan x}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} \\
&= \frac{\cos x}{\sin x(1+x^2)} - \frac{\arctan x}{\sin^2 x}.
\end{aligned}
$$

(c) Beräkna

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{\sqrt{x+3}-2}.$$

(3p)

Lösning:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{\sqrt{x+3}-2} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+2x-3)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+3)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} (x+3)(\sqrt{x+3}+2) = 16.
\end{aligned}
$$

(d) $f(x)$ är en funktion som är jämn, strikt växande för $x > 0$ och som uppfyller $f(4) = 5$ och $f(0) = 10$. Bestäm alla x för vilka $f(x/3) = 5$. (3p)

Lösning: Eftersom f är strikt växande för $x > 0$ är 4 det enda positiva tal för vilket f ger värdet 5. Eftersom f är jämn och $f(0) \neq 5$ är därför $f(x) = 5$ om och endast om $x = \pm 4$. Detta betyder att $f(x/3) = 0$ om och endast om $x/3 = \pm 5$, dvs $x = \pm 15$.

(e) Lös ekvationen $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$. (4p)

Lösning:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{3}}{4} = \sin x \cos x \\
\iff & \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sin x \cos x = \sin(2x) \\
\iff & 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ eller } 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
\iff & x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ eller } x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$