MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2016-01-05 kl. 14.00–18.00
Tentamen Telefonvakt: ?
?

LMA515 Matematik BI1 och KI1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). För betyg 4 resp. 5 krävs 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. Lös olikhetsekvationen $|4x - 10| < 2$. (4p)

Lösning:

$$x < \frac{5}{2} : \; -4x + 10 < 2 \iff 8 < 4x \iff 2 < x.$$
$$x \geq \frac{5}{2} : 4x - 10 < 2 \iff 4x < 12 \iff x < 3.$$

Alltså är olikheten uppfylld på mängden $[2, \frac{5}{2}[\cup [\frac{5}{2}, 3] = [2, 3]$.

3. Låt f vara en deriverbar funktion för vilken $f(3) = 1$ och $f'(3) = -2$.

(a) Låt l vara den linje som dels är vinkelrät mot tangenten för f:s graf i $(3, 1)$, dels passerar genom origo. Ange en ekvation för l. (2p)
Lösning: Tangenten för f:s graf i $(3, 1)$ har lutning $f'(3) = -2$. Alltså har l lutning $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$ och dess ekvation är $y = \frac{1}{2}x + m$ för något $m \in \mathbb{R}$. Eftersom linjen passerar origo måste $m = 0$, så ekvationen för l är $y = \frac{1}{2}x$.

(b) Om $g(x) = f(-x)$, beräkna $g'(-3)$. (2p)
Lösning: $g'(x) = \frac{df(-x)}{dx} = -f'(-x)$ så $g'(-3) = -f'(3) = 2$. Alternativt: grafen för g är samma som grafen för f speglad i y-axeln. Alltså är lutningen för g:s graf då $x = -3$ minus lutningen för f:s graf då $x = 3$, dvs $-f'(3) = 2$.

4. Låt $h(x) = 3 + \sqrt{x^2 + 1}$.

(a) Välj funktioner f, g så att $h(x) = f \circ g(x)$. (1p)
Lösning: T ex $f(y) = 3 + \sqrt{y}$, $g(x) = x^2 + 1$.

(b) Formulera kedjeregeln. (1p)

Lösning: Om f och g är deriverbara funktioner så är

$$\frac{d}{dx} f \circ g(x) = f'(g(x))g'(x).$$

(c) Använd kedjeregeln för att bestämma $h'(x)$. (2p)

Lösning: $f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ och $g'(x) = 2x$, så

$$h'(x) = \frac{d}{dx} f \circ g(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}.$$

5. Bestäm

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^7}{e^x} - 1 \right)^8 .$$

(3p)

Lösning:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^7}{e^x} - 1 \right)^8 = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^7}{e^x} - 1 \right)^8 = (-1)^8 = 1$$

eftersom e^x växer snabbare än alla potensfunktioner när $x \to \infty$.

6. Bestäm dy/dx för kurvan $x^3 + 4xy + y^2 + 1 = 0$. (3p)

Lösning: Derivering av båda sidor med avseende på x ger

$$0 = 3x^2 + 4y + 4x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}(4x + 2y) + 3x^2 + 4y$$
$$\iff \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 4y}{4x + 2y}.$$

7. (a) Ange eventuella assymptoter för $f(x) = \frac{1}{x^2-3x-10}$. (2p)

Lösning: $x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$ så grafen har lodräta assymptoter för $x = -2$ och $x = 5$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ så grafen har den vågräta assymptoten $y = 0$.

(b) Ge ett algebraiskt uttryck för en funktion med lodrät assymptot i $x = 1$ och vågrät assymptot i $y = 2$. (2p)

Lösning: T ex $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

8. Ett föremåls position varierar över tid enligt funktionen $s(t) = \frac{1}{3-3t+t^2}$ då $t \geq 0$. Vid vilken eller vilka tidpunkter t är dess acceleration noll? (4p)

Lösning: Accelerationen ges av andraderivatan till $s(t)$ eller derivatan till $v(t)$:

$$\begin{aligned} a(t) = \frac{d}{dt}v(t) =& \frac{d}{dt}\left(\frac{3-2t}{(3-3t+t^2)^2}\right) \\ =& \frac{-2(3-3t+t^2)^2 - (3-2t)2(-3+2t)(3-3t+t^2)}{((3-3t+t^2)^2)^2} \\ =& \frac{-2(3-3t+t^2) - (3-2t)2(-3+2t)}{(3-3t+t^2)^3} \\ =& \frac{12-18t+6t^2}{(3-3t+t^2)^3}. \end{aligned}$$

Högerledet är noll om och endast om dess täljare är noll, dvs $t = 1$ eller $t = 2$.

9. (a) Formulera instängningssatsen. (1p)

Lösning: Om $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ i närheten av $x = a$ och

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

så är

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

(b) Använd instängningssatsen för att visa att (3p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1+e^{1/x}} = 0.$$

Lösning:

$$e^{1/x} > 0 \Rightarrow 1 + e^{1/x} > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+e^{1/x}} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{x}{1+e^{1/x}} < x.$$

Utsagan följer från instängningssatsen eftersom

$$\lim_{x\to 0} 0 = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

10. Om $f(x) = 2\arccos x$, hitta $f'(x)$ med hjälp av implicit differentiering. (4p)

Lösning:

$$y = 2\arccos x \Rightarrow \cos(y/2) = x.$$

Implicit differentiering ger

$$-\frac{\sin(y/2)}{2}\frac{dy}{dx} = 1 \iff \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\sin(y/2)}.$$

Enligt trigonometriska ettan är nämnaren lika med $\pm\sqrt{1-\cos^2(y/2)}$. Dessutom är $y = 2\arccos x$ som är en avtagande funktion, så dess derivata är negativ, dvs

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\sqrt{1-\cos^2(y/2)}} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Lycka till!
Petter Johansson

Anonym kod	LMA515 Matematik BI1 och KI1 2016-01-05	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Skriv följande tal som en potens av 2: (3p)

$$\frac{8^3 \cdot 2^{-1/2}}{2^{5/3}}.$$

Lösning:

$$\frac{8^3 \cdot 2^{-1/2}}{2^{5/3}} = \frac{(2^3)^3 \cdot 2^{-1/2}}{2^{5/3}} = 2^{3\cdot 3-1/2-5/3} = 2^{\frac{54-3-10}{6}} = 2^{41/6}.$$

(b) Beräkna

$$\lim_{x\to 3} \frac{2}{x-3} - \frac{x+5}{x^2-2x-3}.$$

(3p)

Lösning:

$$\frac{2}{x-3} - \frac{x+5}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x-3} - \frac{x+5}{(x-3)(x+1)} = \frac{2(x+1)-(x+5)}{(x-3)(x+1)}$$
$$= \frac{x-3}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{x+1},$$

så

$$\lim_{x\to 3} \frac{2}{x-3} - \frac{x+5}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{4}.$$

(c) Ange definitionsmängden (domänen) och värdemängden till funktionen $f(x) = \sqrt{\arccos x}$. (3p)

Lösning: Vi har villkoren $\arccos x \geq 0$ och $-1 \leq x \leq 1$ för att funktionen ska vara definierad. Det första villkoret är alltid uppfyllt. Definitionsmängden är alltså $[-1, 1]$. Det minsta värdet funktionen antar är 0 (då $x = 1$). Det största värdet funktionen antar är $\sqrt{\pi}$ (då $x = -1$). Eftersom funktionen är kontinuerlig antas alla värden däremellan (satsen om mellanliggande värden). Värdemängden är alltså $[0, \sqrt{\pi}]$.

(d) Låt $f(x) = 2\ln(x+2)$. Bestäm $f^{-1}(\frac{1}{3})$. (3p)

Lösning: $f^{-1}(\frac{1}{3})$ är det x för vilket $f(x) = \frac{1}{3}$, dvs

$$\frac{1}{3} = 2\ln(x+2) \iff \frac{1}{6} = \ln(x+2) \iff e^{\frac{1}{6}} = x+2 \iff x = e^{\frac{1}{6}} - 2.$$

Alltså är $f^{-1}(\frac{1}{3}) = e^{\frac{1}{6}} - 2$.

(e) Hitta alla värden av x i intervallet $[0, 2\pi]$ som uppfyller ekvationen $\cos x = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. (4p)

Lösning:

$$\cos x = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x}$$
$$\iff -\cos x \sin x = \cos x.$$

Fall I: $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$ eller $\frac{3\pi}{2}$.
Fall II: $\sin x = -1 \iff x = \frac{3\pi}{2}$.
Alltså, $x = \frac{\pi}{2}$ eller $x = \frac{3\pi}{2}$.