MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 2016-08-16 kl. 08.30–12.30

Tentamen | Telefonvakt: ?

?

LMA515 Matematik BI1 och KI1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). För betyg 4 resp. 5 krävs 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. Lös ekvationen $|x-1| = 2x+1$. (4p)

Lösning:

$$x < 1: \; -x+1 = 2x+1 \iff 3x = 0 \iff x = 0.$$
$$x \geq 1: x-1 = 2x+1 \iff x = -2 < 1.$$

Alltså är den enda lösningen $x = 0$.

3. Beräkna följande gränsvärde eller visa att det inte existerar. (3p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}.$$

Lösning:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

och

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Eftersom höger- och vänstergränsvärdena är olika, existerar inte gränsvärdet.

4. Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = \arctan\left(\frac{e^x}{x-1}\right)$. Förenkla så långt som möjligt. (3p)

Lösning: Kedjeregeln ger

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{e^x}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{d\left(\frac{e^x}{x-1}\right)}{dx} =$$
$$= \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+e^{2x}} \cdot \frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2+e^{2x}}.$$

5. Positionen vid tiden t av ett föremål ges av $s(t) = \sin t \sin(t + \pi/4)$. (4p)

(a) Vad är föremålets acceleration vid tiden $t = \pi$?
Lösning: Accelerationen ges av andraderivatan:

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2}s(t) = \frac{d}{dt}\left(\cos t \sin(t + \pi/4) + \sin t \cos(t + \pi/4)\right) = \frac{d}{dt}\left(\sin(2t + \pi/4)\right) = 2\cos(2t+\pi/4).$$

Alltså, $a(\pi) = 2\cos(2\pi + \pi/4) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

(b) Kan föremålets hastighet överstiga $\sqrt{2}$?
Lösning: Hastigheten ges av $v(t) = s'(t) = \sin(2t + \pi/4)$. Det maximala värdet av $\sin(2t + \pi/4)$ är $1 < \sqrt{2}$, så svaret är nej.

6. (a) Formulera derivatans definition. (1p)
Lösning: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

(b) Om $f(x) = x^2 + 4x$, hitta $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition. (3p)
Lösning:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 4(x+h) - (x^2+4x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 + 4x + 4h - x^2 - 4x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2 + 4h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2x + h + 4 = 2x + 4.
\end{aligned}$$

7. Ge exempel på funktioner $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $i(x)$ sådana att $f(x)$ har definitionsområde $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $g(x)$ är definierad men inte kontinuerlig i $x = 0$, $h(x)$ är kontinuerlig men inte deriverbar i $x = 0$ och $i(x)$ har positiv derivata men negativ andraderivata i $x = 0$. Endast svar krävs. (4p)

Lösning: T ex $f(x) = 1/x$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = |x|$, $i(x) = x - x^2$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

8. Bevisa lösningsformeln för andragradsekvationer (pq-formeln). (4p)

Lösning: Kvadratkomplettering ger

$$\begin{aligned} x^2+px+q=0 &\iff \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q \\ &\iff \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q \\ &\iff x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \\ &\iff x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \end{aligned}$$

9. Ge ett uttryck för inversen till $f(x)=\sin(\arctan x)$ utan att använda trigonometriska funktioner eller arcusfunktioner. (4p)

Lösning: Låt $y\in[-1,1]$. Då har vi

$$\begin{aligned} &\sin(\arctan x)=y \\ \iff &\arctan x=\arcsin y \\ \iff &x=\tan\arcsin y=\frac{\sin\arcsin y}{\cos\arcsin y}=\frac{y}{\cos\arcsin y}. \end{aligned}$$

Enligt trigonometriska ettan kan vi skriva om nämnaren i högerledet till

$$\pm\sqrt{1-(\sin\arcsin y)^2}=\pm\sqrt{1-y^2}.$$

Eftersom $\arcsin y$ ligger i det intervall där cos ger positiva värden, måste tecknet framför rottecknet vara plus. Alltså är $f^{-1}(y)=x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$.

10. Bestäm tangenten till kurvan som ges av $x^2+xy^4-(1+x)y^3+y^2=1$, i den punkt där $x=1$ och $y>0$. (4p)

Lösning: För att hitta y-koordinaten i den aktuella punkten sätter vi in $x=1$ i ekvationen:

$$1^2+1\cdot y^4-2y^3+y^2=1 \iff y^4-2y^3+y^2=0 \iff y^2(y-1)^2=0 \iff y=0 \text{ eller } y=1.$$

Eftersom $y>0$, är det $(1,1)$ som är den aktuella punkten. Implicit differentiering med avseende på x ger

$$\begin{aligned} &2x+y^4+4xy^3y'-y^3-3(1+x)y^2y'+2yy'=0 \\ \iff &y'(4xy^3-3(1+x)y^2+2y)=2x+y^4-y^3 \\ \iff &y'(1,1)=\frac{2x+y^4-y^3}{4xy^3-3(1+x)y^2+2y}=\frac{2+1-1}{4-3\cdot 2+2}. \end{aligned}$$

Nämnaren i högerledet är noll och alltså är y' inte definierad där. Därför måste tangenten i $(1,1)$ vara parallell med y-axeln. Alltså ges den av ekvationen $x=1$.

Lycka till!
Petter Johansson

Anonym kod	LMA515 Matematik BI1 och KI1 2016-08-16	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Kvadratkomplettera $2x^2 - 6x + 1$ och förenkla så långt som möjligt. (3p)

Lösning:

$$2x^2 - 6x + 1 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}\right) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}.$$

(b) Ge en ekvation för den linje i planet som passerar genom $(4, 2)$ och är vinkelrät mot linjen $3x - 2y + 1 = 0$. (4p)

Lösning:

$$3x - 2y + 1 = 0 \iff y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Alltså har denna linje lutning $\frac{3}{2}$ och den efterfrågade linjen har lutning k så att

$$k \cdot \frac{3}{2} = -1 \iff k = -\frac{2}{3}.$$

Vi ansätter ekvationen $y = -\frac{2}{3}x + m$. Eftersom $(4, 2)$ ligger på linjen, uppfyller m att

$$2 = -\frac{2}{3} \cdot 4 + m \iff m = 2 + \frac{2}{3} \cdot 4 = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}.$$

Alltså ges vår linje av att $y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$.

(c) Förenkla $\ln(x^2 + 2x + 1) - \ln(x^2 - 1)$. (3p)

Lösning:

$$\begin{aligned}\ln(x^2 + 2x + 1) - \ln(x^2 - 1) &= \ln((x + 1)^2) - \ln((x + 1)(x - 1))\\ &= 2\ln(x + 1) - (\ln(x + 1) + \ln(x - 1))\\ &= \ln(x + 1) - \ln(x - 1).\end{aligned}$$

(d) Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = \sqrt{\ln x} + 1$. (3p)

Lösning:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}.$$

(e) Låt $f(x) = x^3 \sin x$ och $g(x) = 0$. Avgör om f och g är udda, jämna eller inget av det. (3p)

Lösning:

$$f(-x) = (-x)^3 \sin(-x) = -x^3(-\sin x) = x^3 \sin x = f(x),$$

alltså är f jämn.

$$g(-x) = 0 = g(x) = -g(x),$$

så g är både udda och jämn.