MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola

Tentamen

Datum: 2014-10-28 kl. 08.30–12.30

Telefonvakt: Klas Modin

0708 456479

LMA 033/515 Matematik BI1 och KI1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 23 poäng. För betyg 4 resp. 5 krävs 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. Lös olikhetsekvationen $x^2 - 3x + 2 < 0$. (4p)

Lösning: Faktorisering ger $f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. $f(x) \geq 0$ om $x \leq 1$. $f(x) \geq 0$ om $x \geq 2$. Däremot, $f(x) < 0$ om $1 < x < 2$. Olikheten gäller alltså för x i intervallet $(1, 2)$.

3. Kurvan $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 12 = 0$ beskriver en cirkel. (4p)

(a) Ange centrumpunkten och radien för cirkeln.

Lösning: Kvadratkomplettering ger:

$$x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9 \quad \text{och} \quad y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4.$$

Alltså

$$x^2-6x+y^2+4y+12 = 0 \iff (x-3)^2-9+(y+2)^2-4+12 = 0 \iff (x-3)^2+(y+2)^2 = 1.$$

Detta är en cirkel med centrumpunkt $(3, -2)$ och radie 1.

(b) Ange en ekvation för tangentlinjen till cirkeln i punkten $(3, -1)$.

Lösning: Punkten $(3, -1)$ ligger rakt ovanför cirkelns centrumpunkt. Alltså är lutningen för tangentlinjen där 0. Alltså ges tangentlinjen av ekvationen $y = -1$.

4. Räkna ut gränsvärdet (3p)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1 - \sqrt{4x^2 + x}}.$$

Lösning: Division med x i täljaren och nämnaren ger

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1 - \sqrt{4x^2+x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \sqrt{4 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} - \sqrt{4 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}} = \frac{1}{0 - \sqrt{4+0}} = -\frac{1}{2}$$

Alltså, gränsvärdet existerar och är lika med $-1/2$.

5. Derivera uttrycket $y = e^{2\cos\sqrt{x}}$. (3p)

Lösning: Kedjeregeln ger

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{2\cos\sqrt{x}} = e^{2\cos\sqrt{x}}\frac{d}{dx}2\cos\sqrt{x} = 2e^{2\cos\sqrt{x}}(-\sin\sqrt{x})\frac{d}{dx}\sqrt{x} = -\frac{e^{2\cos\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

6. Låt $y = \log_2(x^2+1)$. Ange en ekvation för tangentlinjen till kurvan i punkten $(1,1)$. (4p)

Lösning:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\ln 2)(x^2+1)}\frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{2x}{(\ln 2)(x^2+1)}.$$

Lutningen i punkten $x = 1$ är alltså $m = \frac{2\cdot 1}{(\ln 2)(1^2+1)} = \frac{1}{\ln 2}$. Punkt-lutningsformeln ger nu

$$y - 1 = \frac{1}{\ln 2}(x-1) \iff y = \frac{1}{\ln 2}(x-1)+1.$$

7. Positionen vid tiden t av ett föremål ges av $s = f(t) = \sin^2(t)$. (4p)

(a) Vad är föremålets acceleration vid tiden $t = \pi$?

Lösning: Accelerationen ges av andraderivatan:

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2}f(t) = \frac{d}{dt}((2\sin t)(\cos t)) = \frac{d}{dt}(\sin 2t) = 2\cos 2t.$$

Alltså, $a(\pi) = 2\cos(2\pi) = 2$.

(b) Vad är föremålets högsta momentana hastighet?

Lösning: Hastigheten ges av $v(t) = \sin 2t$. Det maximala värdet av $\sin 2t$ är 1, så alltså är den maximala hastigheten 1.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

(4p)

8. (a) Formulera instängningssatsen.

Lösning: Om $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ i närheten av $x = a$ och

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

så är

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

(b) Använd instängningssatsen för att visa att

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Lösning: För $x \neq 0$ gäller

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1.$$

Multiplicera denna olikheten med x^2 så fås (eftersom $x^2 \geq 0$)

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2.$$

Utsagan följer från instängningssatsen eftersom

$$\lim_{x \to 0} x^2 = \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0.$$

9. Låt (4p)

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & \text{om } x < 0 \\ -4x + 4 & \text{om } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Är $f(x)$ kontinuerlig i punkten $x = 0$? Motivera ditt svar.

Lösning: Vänstergränsvärdet $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ existerar och är lika med 4. Högergränsvärdet $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ existerar och är också lika med 4. Alltså existerar gränsvärdet $\lim_{x \to 0} f(x)$ och är lika med 4. Eftersom även $f(0) = 4$ så är $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, d.v.s. f är kontinuerlig i punkten $x = 0$.

(b) Är $f(x)$ deriverbar i punkten $x = 0$? Motivera ditt svar.

Lösning: Vänstergränsvärdet $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ existerar och är lika med -4. Högergränsvärdet $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ existerar och är också lika med -4. Alltså existerar gränsvärdet $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$, d.v.s. f är deriverbar i punkten $x = 0$.

10. Bestäm derivatan till funktionen $f(x) = x^{\sin x}$. (4p)

Lösning:

$$y = x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = (\sin x) \ln x$$

Implicit differentiering samt produktregeln ger

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\cos x) \ln x + \frac{\sin x}{x} \iff \frac{dy}{dx} = y\left((\cos x) \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

Alltså, $f'(x) = x^{\sin x}\left((\cos x) \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$.

Lycka till!
Klas M

Anonym kod	LMA 033/515 Matematik BI1 och KI1 2014-10-28	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Lös ekvationen $\sqrt{2-x} - x = 0$. (4p)
Lösning: Kvadrering av ekvationen $\sqrt{2-x} = x$ ger

$$2 - x = x^2 \iff x^2 + x - 2 = 0 \iff (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{8}{4} = 0 \iff (x + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$$
$$\iff x + \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2.$$

x_1 är en sann rot, eftersom $\sqrt{2-1} - 1 = \sqrt{1} - 1 = 0$. x_2 är en falsk rot, eftersom $\sqrt{2-(-2)} - 1 = \sqrt{4} - 1 = 2 - 1 = 1 \neq 0$. Alltså, ekvationen har en lösning $x_1 = 1$.

(b) Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = \frac{\tan x}{e^{-\sin x}}$. Förenkla så långt som möjligt. (3p)
Lösning:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}e^{\sin x}\tan x = e^{\sin x}\cos x \tan x + e^{\sin x}\frac{1}{\cos^2 x} =$$
$$e^{\sin x}\left(\cos x \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) = e^{\sin x}\left(\sin x + \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = e^{\sin x}\left(\sin x + 1 + \tan^2 x\right)$$

eller alternativt $e^{\sin x}\left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$.

(c) Ange inversen f^{-1} till funktionen $f(x) = 1 - e^{-x}$. (3p)
Lösning:

$$y = 1 - e^{-x} \Rightarrow \ln(1-y) = -x \iff x = -\ln(1-y).$$

Inversen ges alltså av $f^{-1}(x) = -\ln(1-x)$ (som alternativt kan skrivas $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$).

(d) Ange domänen (definitionsmängden) och värdemängden till funktionen $f(x) = \sqrt{16 - x^4}$. (3p)
Lösning: Vi har villkoret $16 - x^4 \geq 0$ för att funktionen ska vara definierad. Alltså $16 \geq x^4 \iff 4 \geq x^2 \iff -2 \leq x \leq 2$. Domänen är alltså $[-2, 2]$. Det minsta värdet funktionen antar är 0 (då $x = 2$ eller $x = -2$). Det största värdet funktionen antar är 4 (då $x = 0$). Eftersom funktionen är kontinuerlig antas alla värden däremellan (satsen om mellanliggande värden). Värdemängden är alltså $[0, 4]$.

(e) Hitta alla värden av x i intervallet $[0, 2\pi]$ som uppfyller ekvationen $2\cos x + \sin 2x = 0$. (3p)
Lösning: Använder man $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ fås

$$2\cos x + 2\sin x \cos x = 0 \iff 2\cos x(1 + \sin x) = 0.$$

Fall I: $2\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$ och $x_2 = \frac{3\pi}{2}$.
Fall II: $1 + \sin x = 0 \iff \sin x = -1 \Rightarrow x_3 = \frac{3\pi}{2} = x_2$.
Alltså, två lösningar $x_1 = \frac{\pi}{2}$ och $x_2 = \frac{3\pi}{2}$.