MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2015-01-02 kl. 14.00–18.00
Tentamen | Telefonvakt: Stig Larsson
073 340 9006

LMA 033/515 Matematik BI1 och KI1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng. För betyg 4 resp. 5 krävs 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. Lös absolutvärdesekvationen $|x+3| = |2x+1|$. (4p)

Lösning: Ekvationen är uppfyllt om antingen $x+3 = 2x+1$ eller $x+3 = -(2x+1)$. Första ekvationen har lösningen $x_1 = 2$. Andra ekvationen har lösningen $x_2 = -4/3$. Lösningarna är alltså $x_1 = 2$ och $x_2 = -4/3$.

3. (a) Ange en ekvation som beskriver cirkeln i planet som skär genom punkten $(2,3)$ och med centrumpunkt $(1,2)$. (4p)

Lösning: Radien är avståndet mellan $(2,3)$ och $(1,2)$, alltså $r = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$. Cirkeln ekvation är alltså:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = r^2 = 2.$$

(b) Ange en ekvation för tangentlinjen till cirkeln i punkten $(2,3)$.

Lösning: Linjen mellan centrumpunkten $(1,2)$ och punkten $(2,3)$ på cirkeln har lutningen 1. Tangentlinjen är vinkelrät mot den linjen, alltså gäller att dess lutningskoefficient uppfyller $m \cdot 1 = -1$, d.v.s. $m = -1$. Punkt-lutningsformeln ger nu

$$y - 3 = -1(x-2) \iff y = -x + 5.$$

4. Räkna ut gränsvärdet (3p)

$$\lim_{x\to 1} \arctan\left(\frac{2-2\sqrt{x}}{1-x}\right).$$

Lösning: Eftersom arctan är en kontinuerlig funktion gäller att

$$\lim_{x\to 1} \arctan\left(\frac{2-2\sqrt{x}}{1-x}\right) = \arctan\left(\lim_{x\to 1}\frac{2-2\sqrt{x}}{1-x}\right).$$

Eftersom $(1-x) = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$ får vi

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-2\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{2-2\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1}\frac{2}{1+\sqrt{x}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Gränsvärdet blir alltså $\arctan 1 = \pi/4$.

5. Derivera funktionen $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$. Förenkla så långt som möjligt. (3p)

Lösning: Kvotregeln ger

$$f'(x) = \frac{(2+\cos x)\frac{d}{dx}\sin x - (\sin x)\frac{d}{dx}(2+\cos x)}{(2+\cos x)^2} = \frac{(2+\cos x)\cos x + \sin^2 x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}.$$

6. (a) Hitta alla horisontella asymptoter för grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^2+1}{3x-6}$. (4p)

Lösning: Eftersom

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{3x-6} \to \infty$$

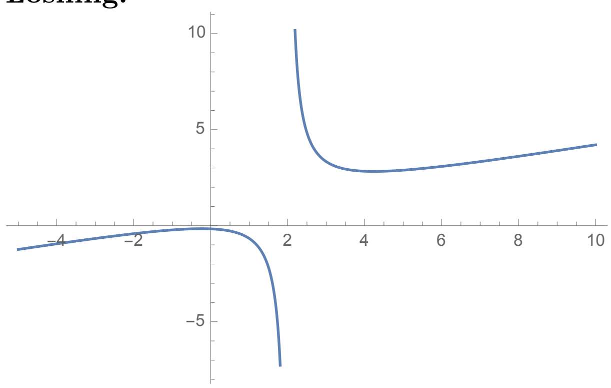
och

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{3x-6} \to -\infty$$

så finns inga horisontella asymptoter. (Däremot finns det en *vertikal* asymptot vid $x = 2$.)

(b) Skissera grafen till $f(x)$.

Lösning:



7. Positionen vid tiden t av ett föremål ges av $s = f(t) = \dfrac{t^4}{12} - \dfrac{5t^3}{3} + \dfrac{9t^2}{2} + \dfrac{1}{2}$. Ange alla tidpunkter då föremålets acceleration är 0. (4p)

Lösning: Accelerationen ges av andraderivatan:

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2}f(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^3}{3} - 5t^2 + 9t\right) = t^2 - 10t + 9 = (t-1)(t-9).$$

Detta polynomet är 0 vid två tidpunkter: $t_1 = 1$ och $t_2 = 9$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

8. (a) Formulera satsen om mellanliggande värden. (4p)

Lösning: Om $f(x)$ är en funktion med domän $[a,b]$, $f(a) \neq f(b)$ och N är ett tal mellan $f(a)$ och $f(b)$, då finns ett tal $c \in (a,b)$ så att $f(c) = N$.

(b) Visa att ekvationen

$$\arctan x = 1 - x$$

har minst en lösning.

Lösning: Definiera funktionen $f(x) = x - 1 + \arctan x$. Vi ska visa att ekvationen $f(x) = 0$ har minst en lösning. Notera först att $f(x)$ är kontinuerlig. Dessutom är $f(0) = 0 - 1 + \arctan 0 = -1 < 0$ och $f(1) = 1 - 1 + \arctan 1 = \pi/4 > 0$. Satsen om mellanliggande värden ger då att det existerar ett $c \in (0,1)$ så att $f(c) = 0$. Talet c är därmed en lösning till ekvationen, alltså finns det minst en lösning.

9. Funktionen (4p)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{om } x \leq -2 \\ \frac{2-x}{x^2-x-2} & \text{om } x > -2. \end{cases}$$

har 3 diskontinuiteter. Bestäm dessa och klassificera var och en som antingen:

(i) borttagningsbar,

(ii) oändlig,

(iii) hopp-diskontinuitet.

Lösning:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = 2 \quad \text{men} \lim_{x\to -2^+} f(x) = 1.$$

Alltså en hopp-diskontinuitet vid $x_1 = -2$. Nämnaren faktoriseras $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ och har alltså nollställena $x_2 = -1$ och $x_3 = 2$. Eftersom både x_2 och x_3 är större än -2, så är båda dessa punkterna diskontinuiteter. Nu gäller

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{3}.$$

Punkten x_3 är alltså en borttagningsbar diskontinuitet. Punkten x_2 är en oändlig diskontinuitet.

10. Bestäm lutningen för tangentlinjen genom $(3,1)$ till kurvan definierad av ekvationen (4p)

$$2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2).$$

Lösning: Implicit differentiering ger

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(2(x^2+y^2)^2 - 25(x^2-y^2)\right) &= 0 \iff \\ 4(x^2+y^2)\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right) - 50x + 50y\frac{dy}{dx} &= 0 \iff \\ \left(8y(x^2+y^2) + 50y\right)\frac{dy}{dx} &= 50x - 8x(x^2+y^2) \iff \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{50x - 8x(x^2+y^2)}{8y(x^2+y^2)+50y}. \end{aligned}$$

I punkten $(3, 1)$ får vi alltså att

$$\frac{dy}{dx} = \frac{50 \cdot 3 - 8 \cdot 3(3^2 + 1^2)}{8(3^2 + 1^2) + 50} = \frac{150 - 8 \cdot 30}{80 + 50} = \frac{15 - 24}{8 + 5} = -\frac{9}{14},$$

d.v.s. lutningen är $-\dfrac{9}{14}$.

Lycka till!
Klas M

Anonym kod	LMA 033/515 Matematik BI1 och KI1 2015-01-02	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Använd binomialsatsen för att expandera uttrycket $(x^2-1)^4$. (3p)

Lösning:

$$(x^2-1)^4 =$$
$$(x^2+(-1))^4 =$$
$$(x^2)^4 + 4(x^2)^3(-1) + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}(x^2)^2(-1)^2 + 4(x^2)(-1)^3 + (-1)^4 =$$
$$x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1.$$

(b) Bestäm $f''(x)$ då $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$. Förenkla så långt som möjligt. (4p)

Lösning:

$$f'(x) = -\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}.$$
$$f''(x) = \frac{8x^3}{(x^2-1)^3} - \frac{6x}{(x^2-1)^2} =$$
$$= \frac{8x^3}{(x^2-1)^3} - \frac{6x^3-6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

(c) Lös ekvationen $\ln x + \ln(x+\dfrac{3}{2}) = 0$. (3p)

Lösning: Logaritmlagarna ger

$$\ln x + \ln(x+\frac{3}{2}) = \ln(x(x+\frac{3}{2})).$$

Alltså får vi ekvationen

$$x(x+\frac{3}{2}) = e^0 = 1 \iff (x-\frac{1}{2})(x+2) = 0$$

Lösningarna till denna polynomekvationen är alltså $x_1 = \frac{1}{2}$ och $x_2 = -2$, men x_2 är en falsk lösning eftersom $\ln(-2)$ inte är definierat. Ekvationen har alltså en lösning som ges av $x = \frac{1}{2}$.

(d) Ange domänen (definitionsmängden) och värdemängden till funktionen $f(x) = \dfrac{5}{1+x^2}$. (3p)

Lösning: Nämnaren är positiv för alla reella tal x, alltså är domänen $(-\infty,\infty)$. Maximala värdet är 5 och uppnås då $x=0$. Minimala värdet är 0 och uppnås då $x\to\pm\infty$. Eftersom funktionen är kontinuerlig antas alla värden däremellan (satsen om mellanliggande värden). Värdemängden är alltså $[0,5]$.

(e) $f(x)$ är en funktion vars nollställen är $x=0$, $x=1$ och $x=4$. Ange alla nollställen till funktionen $g(x)$ definierad av $g(x) = f(x^2)$. (3p)

Lösning: Vi får tre ekvationer för nollställena:

$$x^2 = 0, \quad x^2 = 1, \quad x^2 = 4.$$

Den första ekvationen har endast lösningen $x_1 = 0$. Den andra ekvationen har lösningarna $x_2 = 1$ och $x_3 = -1$. Den tredje ekvationen har lösningarna $x_4 = 2$ och $x_5 = -2$. Alltså, $g(x)$ har fem olika nollställen $x = 0$, $x = \pm 1$ och $x = \pm 2$.