MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 101216 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefonvakt: Peter Helgesson
0703 088 304

LMA515 Matematik KI, del B

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2011 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 17/12. Då meddelas även tid för granskning av tentan. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. (a) Definera strängt växande- och strängt avtagande funktion. (2p)

(b) Visa att funktionen $f(x) = x + \arctan x$ är strängt växande (3p)

3. (a) Beisa att $D \sin x = \cos x$. (3p)

(b) Bestäm arean av det område som begränsas av kurvorna $y = \sin x$ och $y = \cos x$ samt linjerna $x = 0$ och $x = \pi$. (3p)

4. Låt $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-4)}$.

(a) Bestäm eventuella lokala maxima och minima för f. (2p)

(b) Bestäm eventuella horisontella och vertikala asymptoter till kurvan $y = f(x)$. (2p)

(c) Skissa kurvan $y = f(x)$. (Du behöver inte bestämma var funktionen är konvex resp. konkav.) (3p)

5. Lös differentialekvationen $y' = x(y^2 - 1)$. (4p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. (a) Bevisa att om en funktion f är deriverbar i punkten a så måste f vara kontinuerlig i punkten a. (2p)

(b) Bestäm konstanten a så att funktionen (2p)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \sin ax}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig i punkten 0.

7. Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \tan x}\, dx.$ (4p)

8. En bassäng som rymmer 5000 liter är fylld med förorenat vatten, där föroreningens koncentration är 5%. Man börjar tappa ut det förorenade vattnet med en hastighet av 50 l/min. Samtidigt påfylles rent vatten med samma hastighet som det avtappade. Hur lång tid tar det innan föroreringens koncentration gått ner till 1%.(Under hela förloppet sker omrörning i bassängen, varför man kan anta att vätskan är fullständigt blandad.) (4p)

Anonym kod	LMA515 Matematik KI, del B 101216	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Undersök om funktionen $f(x) = xe^{-x}$ har några lokala maxima eller lokala minima. Ange i så fall dessa. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Lös differentialekvationen $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm en primitiv funktion till funktionen $f(x) = \cos x\, e^{2\sin x}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Antag att $xy^3 + xy = 4$ och att $y(2) = 1$. Bestäm $y'(2)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Ljusets intensitet $I(x)$ på ett djup av x meter under havsytan uppfyller enligt Lamberts lag ekvationen $\dfrac{dI}{dx} = -\mu I$,där μ är en konstant. Bestäm I då $I(0) = I_0$. (4p)

Lösning:

Svar: ....