MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 111216 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefonvakt: Peter Helgesson
0703 088 304

LMA515 Matematik KI, del B

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2011 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 17/12. Då meddelas även tid för granskning av tentan. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. (a) Bevisa att om F och G är två primitiva funktioner till f på I, så gäller att $G(x) = F(x) + C$ för alla x i I. (2p)

Lösning: Se föreläsningsanteckningar.

(b) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2+1}{x+1}\,dx$. (2p)

Lösning:

$$\int_0^2 \frac{x^2+1}{x+1}\,dx = \text{polynomdivision} = \int_0^2 (x-1+\frac{2}{x+1})\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + 2\ln(x+1)\right]_0^2 = 2\ln 3.$$

Svar: $2\ln 3$.

3. (a) Bevisa att $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. (4p)

Se föreläsningsanteckningar.

(b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, med hjälp av gränsvärdet ovan. (2p)

Lösning: $\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{(1+\cos x)} \to 1\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ då $x \to 0$.

Svar: $\dfrac{1}{2}$

4. Bestäm konstanten a så att funktionen $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2x+a}$ får ett lokalt minimum för $x = 1$. (6p)

Lösning:

Derivering av f ger $f'(x) = 2 - \dfrac{2}{(2x+a)^2}$. Vi har en extrempunkt för $x = 1$ d.v.s. $f'(1) = 0$, vilket ger $a = -1$ och $a = -3$. Teckenstudier av dessa två $a-$ värden visar att $a = -3$ ger ett lokalt maximum medans $a = -1$ ger ett lokalt minimum. Alltså har vi att endast $a = -1$ är ok!

5. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = 20\cos 2x \\ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 0 \end{cases}$ (6p)

Lösning: Differentialekvationens karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r - 8 = 0$ har lösningarna $r = 1 \pm \sqrt{1+8} \Leftrightarrow r = 4$ eller $r = -2$, så homogenlösningarna har formen

$$y_h = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$$

Som partikulärlösning ansätter vi $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$. Vi har; $y_p'' - 2y_p' - 8y_p = ... = (-12A - 4B)\cos 2x + (-12B + 4A)\sin 2x$ så för att det skall ge en lösning så måste vi ha;

$$\begin{cases} -12A - 4B = 20 \\ -12B + 4A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Differentialekvationens allmänna lösning är således

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x} - \frac{3}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$$

Begynnelsevillkoren ger sedan att;

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{3}{2} = 0 \\ 4C_1 - 2C_2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{2}{3} \\ C_2 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Svar: Begynnelsevärdesproblemet har lösningen $y = \frac{2}{3}e^{4x} + \frac{5}{6}e^{-2x} - \frac{3}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

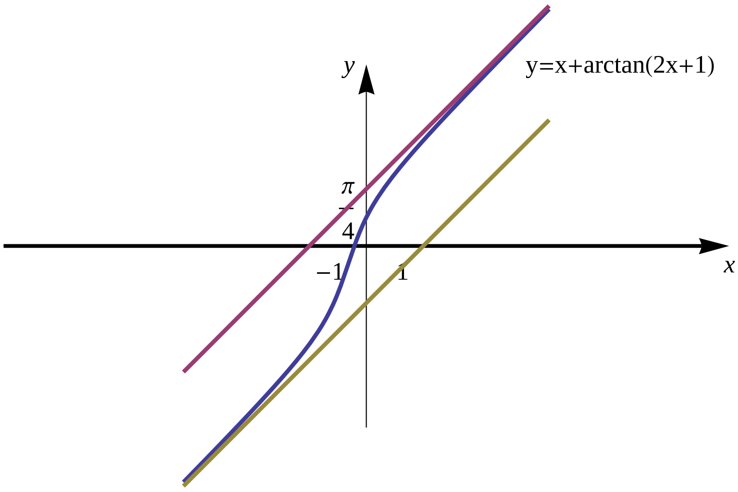
6. Formulera och bevisa areasatsen. Rita figur! (4p)

7. Konstruera kurvan $y = x + \arctan(2x+1)$ med angivande av definitionsmängd, eventuella lokala max- och minpunkter, samt asymptoter. (4p)

Lösning:

$D_f = (-\infty, \infty)$.

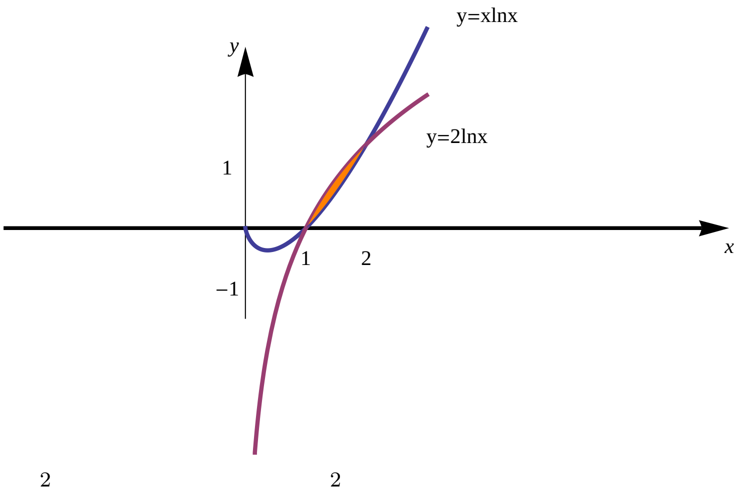
Om vi deriverar f får vi $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{1+(2x+1)^2} = \dfrac{2+(2x+1)^2}{1+(2x+1)^2} > 0 \Rightarrow f$ är strängt växande. Undersökning av asymptoter ger att vi får sneda asymtoterna $y = x + \dfrac{\pi}{2}$ då $x \to \infty$ och $y = x - \dfrac{\pi}{2}$ då $x \to -\infty$.



8. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = 2\ln x$ och $y = x\ln x$. Rita figur! (4p)

Lösning:

Skärningspunkterna mellan kurvorna fås genom $2\ln x = x\ln x \Leftrightarrow (2-x)\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$. Arean som ska beräknas blir då



A$=\int_1^2 (2\ln x - x\ln x)\,dx = \int_1^2 (2-x)\ln x\,dx = (P.I.) = ... = 2\ln 2 - \dfrac{5}{4}$ a.e.

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	LMA515 Matematik KI, del B 111216	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm en primitiv funktion till funktionen $f(x) = \cos^3 x$. (3p)

Lösning:

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos x(1-\sin^2 x)dx = \left\{ \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right\} = \int (1-t^2)dt$$
$$= t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

Svar: $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$.

(b) Lös differentialekvationen $xy' + 2y = \sqrt{x}$. (3p)

Lösning: Ekvationen är linjär av första ordningen. Vi dividerar med x och får

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Multiplikation med den integrerande faktorn $e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2$ ger

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = x^{3/2}.$$

Integrering ger nu $x^2 y = \frac{2}{5}x^{5/2} + C \implies y = \frac{2\sqrt{x}}{5} + \frac{C}{x^2}$.

Svar: $y = \frac{2\sqrt{x}}{5} + \frac{C}{x^2}$, där C är en godtycklig konstant.

(c) Beräkna integralen $\int_0^\infty \frac{1}{(3x+2)^3}dx$. (3p)

Lösning:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(3x+2)^3}dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{(3x+2)^3}dx = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{6(3x+2)^2}\right]_0^R = \frac{1}{24}.$$

Svar: $\frac{1}{24}$.

(d) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2+2}}{2x+5}$. (3p)

Lösning: $\frac{\sqrt{9x^2+2}}{2x+5} = \frac{|x|\sqrt{9+2/x^2}}{x(2+5/x)} = \{|x| = -x\} = -\frac{\sqrt{9+2/x^2}}{2+5/x} \to \frac{3}{2}$ då $x \to -\infty$.

Svar: $\frac{3}{2}$

(e) Lös begynnelsevärdesproblemet $\left\{ \begin{array}{c} x^2 y' = 1 + y^2 \\ y(1) = 0 \end{array} \right.$ (4p)

Lösning: Differentialekvationen är separabel och vi får;

$$x^2 y' = 1+y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{1+y^2} = \frac{dx}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dx}{1+y^2}\,dy = \int \frac{dx}{x^2}\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \arctan y = \frac{-1}{x} + C$$

Begynnelsevillkoret ger sedan att; $\underbrace{\arctan 0}_{=0} = \frac{-1}{1} + C \Rightarrow \quad C = 1$

Svar: $y = \tan(1 - \frac{1}{x})$