MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 111215 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Magnus Önnheim
0703 088 304

LMA515 Matematik KI, del B

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2011 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. (a) Bevisa att om F och G är två primitiva funktioner till f på I, så gäller att $G(x) = F(x) + C$ för alla x i I. (2p)

Lösning:

Se föreläsningsanteckningar.

(b) Beräkna integralen $\int_1^2 x \ln x \, dx$. (2p)

Lösning:

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \{PI\} = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = ... = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

3. (a) Definera begreppet lokalt maximum. Rita figur! (3p)

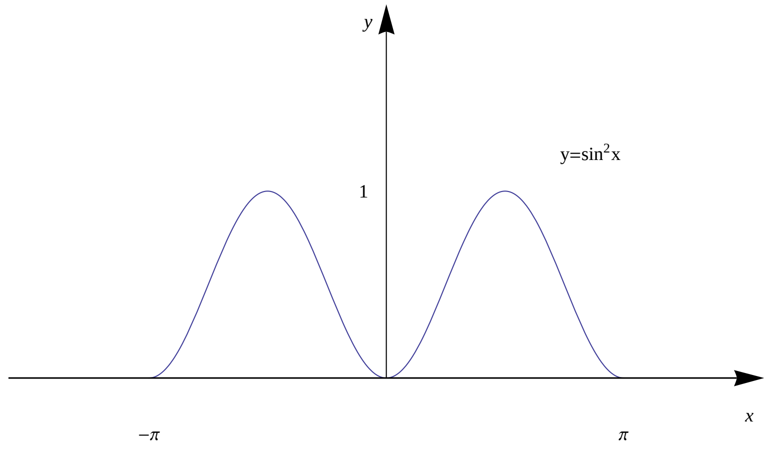
Lösning:

Se föreläsningsanteckningar.

(b) Finn samtliga lokala extrempunkter samt största och minsta värde till funktionen $f(x) = \sin^2 x$ på intervallet $(-\pi, \pi)$. (6p)

Lösning:

Derivering ger $f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin(2x) = 0$ då $x = \frac{n\pi}{2}$. Vi får då för olika värden på n (genom teckenstudier) lokalt minimum i $(0,0)$ som också är minsta värde. Vidare har vi lokalt maximum i $(-\frac{\pi}{2}, 1)$ och $(\frac{\pi}{2}, 1)$ där f också antar sitt största värde.



4. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan $y = \sin 2x$, positiva $x-$ axeln och de vertikala linjerna $x = \dfrac{\pi}{6}$ och $x = \dfrac{\pi}{2}$. Rita figur! (4p)

Lösning:

$A = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin(2x)dx = ... = \dfrac{3}{4}$.

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{x^3+x}dx$. (5p)

Lösning:

$$\int_1^\infty \frac{2}{x^3+x}dx = \{PBU\} = \int_1^\infty (\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1})dx = \left[2\ln x - \ln(x^2+1)\right]_1^\infty = \left[\ln \frac{x^2}{x^2+1}\right]_1^\infty =$$
$$\lim_{u\to\infty} \ln \frac{u^2}{u^2+1} - \ln\frac{1}{2} = 0 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Skissera grafen till $y = \arcsin x$ och härled ett uttryck för derivatan till $\arcsin x$. (3p)

Lösning:

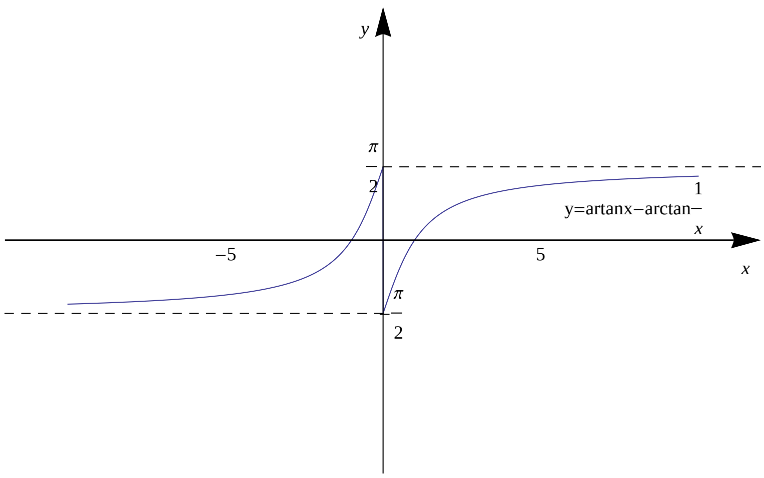
Se föreläsningsanteckningar.

7. Konstruera kurvan $y = \arctan x - \arctan \dfrac{1}{x}$ med angivande av definitionsmängd, eventuella lokala max- och minpunkter, samt asymptoter. (5p)

Lösning:

$D_f = \{x : x \neq 0\}$.
Derivering av f ger
$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot (-\dfrac{1}{x^2}) = \dfrac{2}{1+x^2} > 0 \Rightarrow f$ strängt växande i intervallet $(-\infty, 0) \vee (0, \infty)$.
Vidare har vi att $f \to \dfrac{\pi}{2}$ då $x \to \infty$, vilket ger oss en vågrät asymptot $y = \frac{\pi}{2}$.
Vi har att $f \to -\dfrac{\pi}{2}$ då $x \to -\infty$, vilket ger oss en vågrät asymptot $y = -\frac{\pi}{2}$.
Gränsvärdesstudering i en omgivning kring 0, ger att $f \to -\dfrac{\pi}{2}$ då $x \to 0^+$ och att $f \to \dfrac{\pi}{2}$ då $x \to 0^-$.
Sammanfattning av våra resultat presenteras i nedanstående tabell samt en skiss av grafen.

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	ej	$+$	$+$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}\ /-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



8. I ett nyvädrat rum med volymen 120 m^3 börjar några personer att röka. Röken sprider sig i en takt av 0.01 m^3/min och den välblandade rökluften lämnar rummet i samma takt och ersätts med ren luft genom ventilation med samma takt 0.01 m^3/min. Röken innehåller 4 % av den hälsovådliga gasen CO. Bestäm halten av gasen CO som funktion av tiden. Efter hur lång tid nås det hälsovådliga värdet 0.012 % ? (4p)

Lösning:

Låt $y(t)$ vara koncentrationen (i procent) koloxid (CO) i rummet t min efter det att personerna börjat röka. Vi vet då att $y(0) = 0$. Förändringshastigheten för $y(t)$ (dvs. derivatan) är differensen mellan tillskott och bortfall.

Tillskottet från rökandet är $\dfrac{0.01 \cdot 0.04}{120}$ procentenheter per minut, och
bortfallet p.g.a. ventilation är $\dfrac{0.01\, y(t)}{120}$ procentenheter per minut.
Detta ger oss begynnelsevärdesproblemet;

$$y'(t) = \frac{0.01 \cdot 0.04}{120} - \frac{0.01\, y(t)}{120} \quad , \quad y(0) = 0$$

Differentialekvationen är linjär och kan skrivas;

$$y'(t) + \frac{1}{12000} y(t) = \frac{0.04}{12000} \qquad (DE)$$

Den integrerande faktorn är $e^{\int \frac{1}{12000}\, dt} = e^{\frac{t}{12000}}$ så ;

$$(DE) \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{12000}} y(t)\right) = \frac{0.04}{12000} e^{\frac{t}{12000}} \;\Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{t}{12000}} y(t) = 0.04\, e^{\frac{t}{12000}} + C \;\Leftrightarrow\; y(t) = 0.04 + Ce^{\frac{-t}{12000}}$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger sedan att $C = -0.04$ så

$$y(t) = 0.04(1 - e^{\frac{-t}{12000}})$$

Vi vill nu också bestämma den tidpunkt T för vilket koloxidhalten $y(t)$ nått den farliga nivån 0.00012;

$$0.04(1 - e^{\frac{-T}{12000}}) = 0.00012 \;\Leftrightarrow\; 1 - e^{\frac{-T}{12000}} = 0.003 \;\Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{-T}{12000}} = 0.997 \;\Leftrightarrow\; T = -12000 \ln 0.997$$

Svar: Halten koloxid t minuter efter det att personerna börjat röka är $0.04\,(1 - e^{\frac{-t}{12000}})$ och efter $-12000 \ln 0.997$ (≈ 36) minuter så har halten nått den hälsovådliga nivån.

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	LMA515 Matematik KI, del B 111215	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Lös differentialekvationen $y'' - 3y' - 4y = 0$. (2p)

Lösning:

KE: $r^2 - 3r - 4 = 0 \Leftrightarrow r_1 = -1, r_2 = 4$. Allmänna lösningen blir då
$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$.

Svar: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$.

(b) Ange samtliga asymptoter till kurvan $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{2x + 1}$. (4p)

Lösning:

Lodrät asymptot: $x = -\dfrac{1}{2}$. Undersökning av sned asymptot.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - x + 1}{x(2x+1)} \to \frac{1}{2} \text{ då } x \to \pm\infty.$$

$$f(x) - kx = \frac{x^2 - x + 1}{2x + 1} - \frac{1}{2}x = ... = \frac{-\frac{3}{2}x + 1}{2x + 1} \to -\frac{3}{4} \text{ då } x \to \pm\infty.$$

Svar: Lodrät asymptot: $x = -\dfrac{1}{2}$. Sned asymptot: $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$.

(c) Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$. (3p)

Lösning:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \left\{ \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right\} = -\int \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\cos x} + C.$$

Svar: $\dfrac{1}{\cos x} + C$.

(d) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{3 - \sqrt{10 - x}}{x^2 - 1}$. (3p)

Lösning:

$$\frac{3 - \sqrt{10 - x}}{x^2 - 1} = \frac{9 - 10 + x}{(x-1)(x+1)(3 + \sqrt{10 - x})} = \frac{x - 1}{(x-1)(x+1)(3 + \sqrt{10 - x})} = \frac{1}{(x+1)(3 + \sqrt{10 - x})} \to$$
$\dfrac{1}{12}$ då $x \to 1$.

Svar: $\dfrac{1}{12}$.

(e) Lös begynnelsevärdesproblemet $\left\{ \begin{matrix} 2xyy' = 1 + y^2 \\ y(1) = 1 \end{matrix} \right.$ (4p)

Lösning:

Separabel diff.ekv. och vi får då
$$\int \frac{2y}{1 + y^2}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx \Leftrightarrow \ln(1 + y^2) = \ln x + C$$
$y(1) = 1$ ger $C = \ln 2$. Vi får då $\ln(1 + y^2) = \ln x + \ln 2 = \ln(2x)$. Löser vi ut y ur ekvationen får vi att $y = \sqrt{2x - 1}$.

Svar: $y = \sqrt{2x - 1}$.