

LMA515 Matematik KI, del B

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2011 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida 17/12. Då meddelas även tid för granskning av tentan. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)
2. (a) Definera strängt växande- och strängt avtagande funktion. (2p)
(b) Visa att funktionen $f(x) = x + \arctan x$ är strängt växande (3p)
3. (a) Bevisa att $D \sin x = \cos x$. (3p)
(b) Bestäm arean av det område som begränsas av kurvorna $y = \sin x$ och $y = \cos x$ samt linjerna $x = 0$ och $x = \pi$. (3p)
4. Låt $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-4)}$.
(a) Bestäm eventuella lokala maxima och minima för f . (2p)
(b) Bestäm eventuella horisontella och vertikala asymptoter till kurvan $y = f(x)$. (2p)
(c) Skissa kurvan $y = f(x)$. (Du behöver inte bestämma var funktionen är konvex resp. konkav.) (3p)
5. Lös differentialekvationen $y' = x(y^2 - 1)$. (4p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. (a) Bevisa att om en funktion f är deriverbar i punkten a så måste f vara kontinuerlig i punkten a . (2p)

- (b) Bestäm konstanten a så att funktionen (2p)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin ax}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig i punkten 0.

7. Beräkna integralen $\int \frac{1}{1 + \tan x} dx$. (4p)

8. En bassäng som rymmer 5000 liter är fylld med förorenat vatten, där föroreningens koncentration är 5%. Man börjar tappa ut det förorenade vattnet med en hastighet av 50 l/min. Samtidigt påfyller rent vatten med samma hastighet som det avtappade. Hur lång tid tar det innan föroreningens koncentration gått ner till 1%. (Under hela förloppet sker omrörning i bassängen, varför man kan anta att vätskan är fullständigt blandad.) (4p)

Anonym kod	LMA515 Matematik KI, del B 101216	sid.nummer 1	Poäng
------------	-----------------------------------	-----------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Undersök om funktionen $f(x) = xe^{-x}$ har några lokala maxima eller lokala minima. Ange i så fall dessa. (3p)

Lösning:

Svar:

- (b) Lös differentialekvationen $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ (3p)

Lösning:

Svar:

- (c) Bestäm en primitiv funktion till funktionen $f(x) = \cos x e^{2\sin x}$. (3p)

Lösning:

Svar:

- (d) Antag att $xy^3 + xy = 4$ och att $y(2) = 1$. Bestäm $y'(2)$. (3p)

Lösning:

Svar:

- (e) Ljusets intensitet $I(x)$ på ett djup av x meter under havsytan uppfyller enligt Lamberts lag ekvationen $\frac{dI}{dx} = -\mu I$, där μ är en konstant. Bestäm I då $I(0) = I_0$. (4p)

Lösning:

Svar: