

LMA515 Matematik KI, del B

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2011 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida 17/12. Då meddelas även tid för granskning av tentan. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. (a) Bevisa att om F och G är två primitiva funktioner till f på I , så gäller att $G(x) = F(x) + C$ för alla x i I . (2p)

Lösning: Se föreläsningsanteckningar.

- (b) Beräkna integralen $\int_0^2 \frac{x^2 + 1}{x + 1} dx$. (2p)

Lösning:

$$\int_0^2 \frac{x^2 + 1}{x + 1} dx = \text{polynomdivision} = \int_0^2 \left(x - 1 + \frac{2}{x + 1}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + 2 \ln(x + 1)\right]_0^2 = 2 \ln 3.$$

Svar: $2 \ln 3$.

3. (a) Bevisa att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. (4p)

Se föreläsningsanteckningar.

- (b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$, med hjälp av gränsvärdet ovan. (2p)

Lösning: $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{(1 + \cos x)} \rightarrow 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ då $x \rightarrow 0$.

Svar: $\frac{1}{2}$

4. Bestäm konstanten a så att funktionen $f(x) = 2x + \frac{1}{2x + a}$ får ett lokalt minimum för $x = 1$. (6p)

Lösning:

Derivering av f ger $f'(x) = 2 - \frac{2}{(2x + a)^2}$. Vi har en extrempunkt för $x = 1$ d.v.s. $f'(1) = 0$, vilket ger $a = -1$ och $a = -3$. Teckenstudier av dessa två a -värden visar att $a = -3$ ger ett lokalt maximum medans $a = -1$ ger ett lokalt minimum. Alltså har vi att endast $a = -1$ är ok!

5. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = 20 \cos 2x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$ (6p)

Lösning: Differentialekvationens karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r - 8 = 0$ har lösningarna $r = 1 \pm \sqrt{1+8} \Leftrightarrow r = 4$ eller $r = -2$, så homogenlösningarna har formen

$$y_h = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$$

Som partikulärlösning antar vi $y_p = A \cos 2x + B \sin 2x$. Vi har; $y_p'' - 2y_p' - 8y_p = \dots = (-12A - 4B) \cos 2x + (-12B + 4A) \sin 2x$ så för att det skall ge en lösning så måste vi ha;

$$\begin{cases} -12A - 4B = 20 \\ -12B + 4A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Differentialekvationens allmänna lösning är således

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x} - \frac{3}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x$$

Begynnelsevillkoren ger sedan att;

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{3}{2} = 0 \\ 4C_1 - 2C_2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{2}{3} \\ C_2 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Svar: Begynnelsevärdesproblemet har lösningen $y = \frac{2}{3} e^{4x} + \frac{5}{6} e^{-2x} - \frac{3}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x$

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

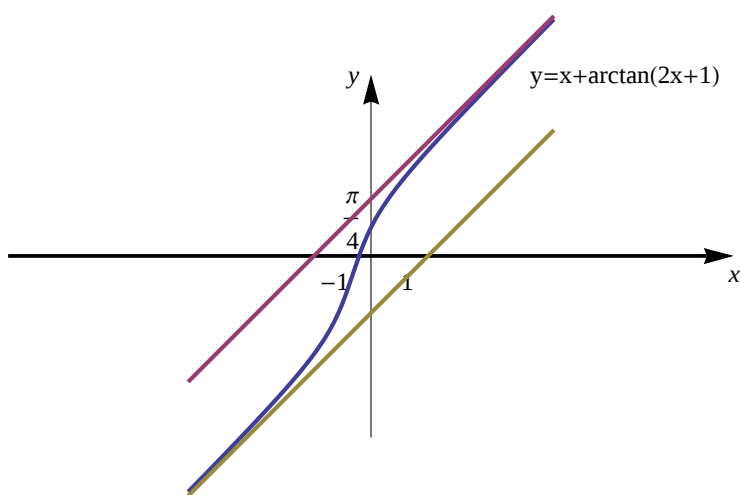
I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Formulera och bevisa areasatsen. Rita figur! (4p)
7. Konstruera kurvan $y = x + \arctan(2x + 1)$ med angivande av definitionsmängd, eventuella lokala max- och minpunkter, samt asymptoter. (4p)

Lösning:

$$D_f = (-\infty, \infty).$$

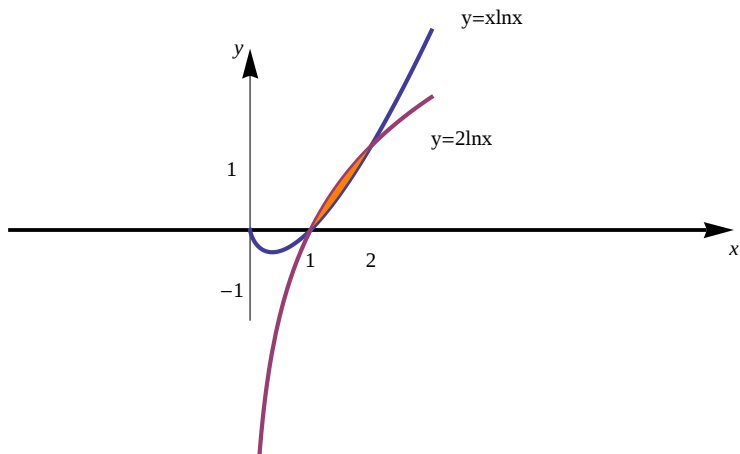
Om vi deriverar f får vi $f'(x) = 1 + \frac{1}{1 + (2x + 1)^2} = \frac{2 + (2x + 1)^2}{1 + (2x + 1)^2} > 0 \Rightarrow f$ är strängt växande. Undersökning av asymptoter ger att vi får sneda asymptoterna $y = x + \frac{\pi}{2}$ då $x \rightarrow \infty$ och $y = x - \frac{\pi}{2}$ då $x \rightarrow -\infty$.



8. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = 2 \ln x$ och $y = x \ln x$. Rita figur! (4p)

Lösning:

Skärningspunkterna mellan kurvorna fås genom $2 \ln x = x \ln x \Leftrightarrow (2 - x) \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$. Arean som ska beräknas blir då



$$A = \int_1^2 (2 \ln x - x \ln x) dx = \int_1^2 (2 - x) \ln x dx = (P.I.) = \dots = 2 \ln 2 - \frac{5}{4} \text{ a.e.}$$

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	LMA515 Matematik KI, del B 111216	sid.nummer 1	Poäng
------------	-----------------------------------	-----------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Bestäm en primitiv funktion till funktionen $f(x) = \cos^3 x$.

(3p)

Lösning:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x dx &= \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right\} = \int (1 - t^2) dt \\ &= t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.\end{aligned}$$

Svar: $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$.

- (b) Lös differentialekvationen $xy' + 2y = \sqrt{x}$.

(3p)

Lösning: Ekvationen är linjär av första ordningen. Vi dividerar med x och får

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Multiplikation med den integrerande faktorn $e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = x^2$ ger

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = x^{3/2}.$$

Integrering ger nu $x^2 y = \frac{2}{5} x^{5/2} + C \implies y = \frac{2\sqrt{x}}{5} + \frac{C}{x^2}$.

Svar: $y = \frac{2\sqrt{x}}{5} + \frac{C}{x^2}$, där C är en godtycklig konstant.

- (c) Beräkna integralen $\int_0^\infty \frac{1}{(3x+2)^3} dx$.

(3p)

Lösning:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(3x+2)^3} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{1}{(3x+2)^3} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{6(3x+2)^2} \right]_0^R = \frac{1}{24}.$$

Svar: $\frac{1}{24}$.

- (d) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2}}{2x+5}$.

(3p)

Lösning: $\frac{\sqrt{9x^2+2}}{2x+5} = \frac{|x|\sqrt{9+2/x^2}}{x(2+5/x)} = \{|x| = -x\} = -\frac{\sqrt{9+2/x^2}}{2+5/x} \rightarrow \frac{3}{2}$ då $x \rightarrow -\infty$.

Svar: $\frac{3}{2}$

- (e) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} x^2 y' = 1 + y^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

(4p)

Lösning: Differentialekvationen är separabel och vi får;

$$x^2 y' = 1 + y^2 \Leftrightarrow \frac{dx}{1+y^2} = \frac{dx}{x^2} \Leftrightarrow \int \frac{dx}{1+y^2} dy = \int \frac{dx}{x^2} dx \Leftrightarrow \arctan y = -\frac{1}{x} + C$$

Begynnelsevillkoret ger sedan att; $\underbrace{\arctan 0}_{=0} = -\frac{1}{1} + C \Rightarrow C = 1$

Svar: $y = \tan(1 - \frac{1}{x})$