

LMA515 Matematik KI, del B

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2011 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. (a) Definera begreppet lokalt maximum. Rita figur! (2p)

Lösning:

Se föreläsningsanteckningar.

- (b) Bestäm största och minsta värde av $f(x) = \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}}$ på intervallet $0 \leq x \leq 4$. (3p)

Lösning:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} + \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} (1 - \sqrt{x}) = 0 \text{ då } x = 1.$$

Vi har då att

$$f(0) = 0 \text{ och } f(4) = \frac{2}{e^2} \text{ (ändpunkterna i det slutna intervallet), samt att } f(1) = \frac{1}{e}.$$

Enligt satsen om största och minsta värde har vi då att $f(0) = 0$ är minsta värde och $f(1) = \frac{1}{e}$ är största värde.

3. (a) Bevisa att $D \sin x = \cos x$, då vinkeln x anges i radianer. (3p)

Lösning:

Se föreläsningsanteckningar.

- (b) Beräkna integralen $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx$ genom att genomföra en lämplig substitution. (2p)

Lösning:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = - \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = -\arctan t + C \\ &= -\arctan(\cos x) + C. \end{aligned}$$

4. Funktionen $f(x) = \frac{3x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$ är given.

- (a) Bestäm eventuella horisontella och vertikala asymptoter till kurvan $y = f(x)$. (2p)

- (b) Bestäm eventuella lokala maxima, lokala minima och inflexionspunkter för f . (3p)

- (c) Skissera kurvan $y = f(x)$. (3p)

Lösning:

$f \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 2^+$ och då $x \rightarrow 2^-$, vilket innebär att vi har en lodrät asymptot: $x = 2$.

$f \rightarrow 3$ då $x \rightarrow \pm\infty$, vilket innebär vågrät asymptot $y = 3$.

Derivering av f ger

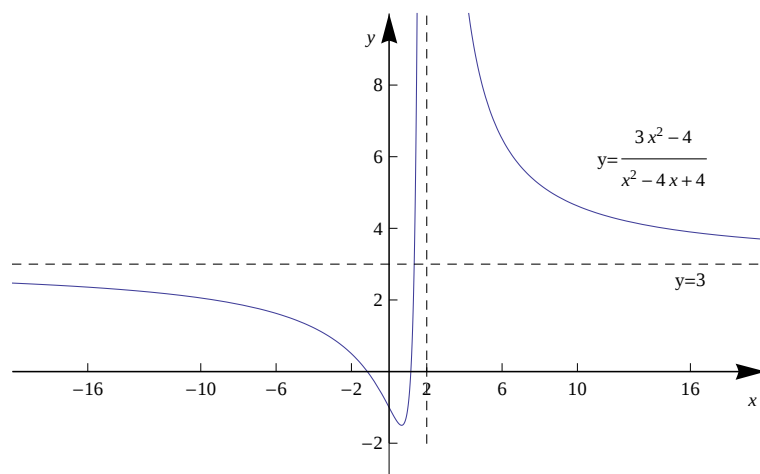
$$f'(x) = \frac{6x(x-2)^2 - (3x^2-4)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2(x-2)(3x^2-6x-3x^2+4)}{(x-2)^4} = \frac{4(2-3x)}{(x-2)^3}.$$

$f'(x) = 0$ för $x = \frac{2}{3}$. $f' < 0$ då $x < \frac{2}{3}$ och $f' > 0$ då $x > \frac{2}{3}$, vilket ger att vi har ett lokalt minimum i punkten $(\frac{2}{3}, -\frac{3}{2})$.

$$f''(x) = \frac{-12(x-3)^3 - 4(2-3x)3(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{12(x-2)^2(-(x-2) - (2-3x))}{(x-2)^6} = \frac{24x}{(x-2)^4}.$$

$f''(x) = 0$ för $x = 0$. Vi har att $f'' < 0$ då $x < 0 \Rightarrow f$ konkav i intervallet och $f'' > 0$ då $x > 0 \Rightarrow f$ konvex i intervallet. f övergår från att vara konkav ($x < 0$) till konvex ($x > 0$), vilket innebär att vi har en inflexionspunkt i $(0, -1)$.

Vi ritar nu grafen till f .



5. Då dagsljuset tränger ner i en sjö avtar ljusets intensitet $I(x)$ med djupet x under vattenytan enligt Lamberts lag: (4p)

$$\frac{dI}{dx} = -kI$$

där k är en positiv konstant. Bestäm funktionen $I(x)$ om ljusintensiteten är $I(0) = I_0$ vid ytan och $I(1) = 0.4I_0$ på 1 meters djup.

Lösning:

Vi skriver (DE) som

$$I' + kI = 0$$

och löser den som en linjär (DE) av första ordningen. I.F $e^{F(x)} = e^{kx}$. multiplicerar vi båda leden med e^{kx} får vi

$$I'e^{kx} + ke^{kx}I = 0 \Leftrightarrow (Ie^{kx})' = 0$$

Integrering av båda leden ger

$$Ie^{kx} = C \Leftrightarrow I(x) = Ce^{-kx}.$$

Vi har att $I(0) = I_0$ vilket ger oss $C = I_0$ och vi får då

$$I(x) = I_0 e^{-kx}.$$

På 1 meters djup har vi att $I(1) = 0.4I_0$ vilket efter insättning ger oss

$$I_0 e^{-k \cdot 1} = 0.4I_0 \Leftrightarrow e^{-k} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow k = -\ln \frac{2}{5}.$$

Sökt funktion blir då

$$I(x) = I_0 e^{\ln \frac{2}{5} x} = I_0 \left(\frac{2}{5}\right)^x.$$

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkänthgränsen.

6. Antag att f är kontinuerlig och att $f \geq 0$ i ett öppet intervall I . Antag vidare att x_0, x ligger i I , med $x_0 \leq x$. Låt $A(x)$ vara arean av det område som begränsas av kurvan $y = f(x)$, x -axeln och de två vertikala linjer som går genom x_0 respektive x . Bevisa att $A'(x) = f(x)$. (4p)

Lösning:

Se föreläsningssanteckningar.

7. Konstruera kurvan $y = \arctan \sqrt{x-1} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$ med angivande av definitionsmängd, eventuella lokala max- och minpunkter, samt asymptoter. (4p)

Lösning:

$$D_f = \{x : x \geq 1\}.$$

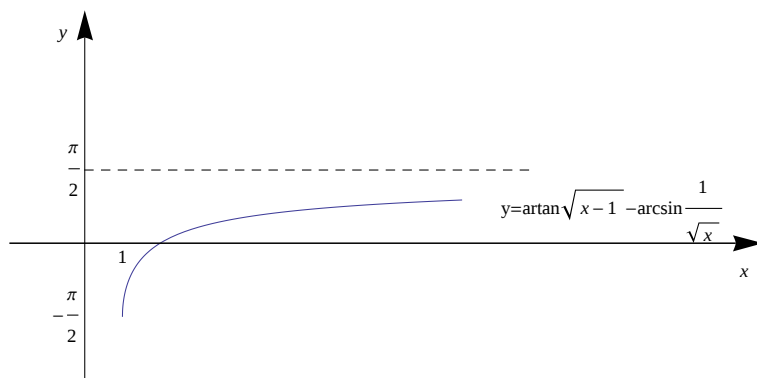
Derivering av f ger

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x-1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \cdot \left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x-1}} > 0, \text{ för } x \geq 1 \Rightarrow f \text{ strängt växande i intervallet } [1, \infty).$$

Vidare har vi att $f \rightarrow \frac{\pi}{2}$ då $x \rightarrow \infty$, vilket ger oss en vågrät asymptot $y = \frac{\pi}{2}$.

Vi har att $f(1) = -\frac{\pi}{2}$, vilket ger oss ett lokalt minimum i punkten $(1, -\frac{\pi}{2})$.

Vi kan nu skissera grafen till f .



8. I en viss bakteriepopulation ändras antalet bakterier med en hastighet som är proportionell mot antalet bakterier. Bestäm antalet bakterier som funktion av tiden om man vet att vid tiden noll är antalet bakterier 1000 stycken och att efter 6 timmar har antalet bakterier fördubblats. Hur många bakterier finns det efter ett dygn? (4p)

Lösning:

Sätt $N(t)$ = antalet bakterier vid tiden t timmar. $\frac{dN}{dt}$ blir då antalet bakterier per timme. Vi får då följande differentialekvationen att lösa:

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

som har den allmänna lösningen

$$N(t) = Ce^{kt}.$$

Vi har att $N(0) = 1000$ vilket ger $C = 1000$ och vi får då

$$N(t) = 1000e^{kt}.$$

Vi har även att enligt texten att $N(6) = 2000$ vilket ger oss att $k = \frac{\ln 2}{6}$ och funktionen blir då

$$N(t) = 1000e^{\frac{\ln 2}{6}t}.$$

Antalet bakterier efter 24 timmar blir

$$N(24) = 1000e^{\frac{\ln 2}{6}24} = 1000e^{4\ln 2} = 1000e^{\ln 16} = 1000 \cdot 16 = 16000.$$

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	LMA515 Matematik KI, del B 121219	sid.nummer 1	Poäng
------------	-----------------------------------	-----------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 4x}$. (3p)

Lösning:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x(x+2)} = \frac{3}{8}.$$

Svar: $\frac{3}{8}$.

(b) Beräkna integralen $\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$. (3p)

Lösning:

$$\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln|x+1| - \ln|x+2| + C.$$

Svar: $\ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C$.

(c) Lös differentialekvationen $y' = \sqrt{y} x$. (3p)

Lösning:

$$y' = \sqrt{y} x \Leftrightarrow (\text{då } y \neq 0) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = x \text{ (sep.)} \Leftrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int x dx,$$

som har allmänna lösningen $y = (\frac{x^2}{4} + C)^2$. Vi ser att $y = 0$ är en lösning till (DE) och att den ej ingår i allmänna lösningen.

Svar: $y = (\frac{x^2}{4} + C)^2$ och $y = 0$ som är en singular lösning.

(d) Kurvan $y = \sin x \sqrt{3 \cos x}$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, roterar kring x -axeln och bildar en homogen rotations kropp K . Beräkna volymen av K . (3p)

Lösning:

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot 3 \cos x dx = \pi \left[\sin^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \text{ v.e.}$$

Svar: π v.e.

(e) Lös differentialekvationen $y'' + 2y' + y = x^2$. (4p)

Lösning:

$y = y_h + y_p$. KE: $r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = -1$. Homogena lösningen blir då $y_h = (C_1 x + C_2) e^{-x}$.

Ansätt: $y_p = ax^2 + bx + c$. Derivering och insättning i (DE) ger $a = 1$, $b = -4$, $c = 6$.

Svar: $y = (C_1 x + C_2) e^{-x} + x^2 - 4x + 6$.