

LMA515c Dugga 2, 2017-02-13

Variant 1.

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Beräkna AB . (1p)

Lösning:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-6 & 6+2 \\ 2+3 & 4-1 \\ 4+0 & 8+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 5 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

2. Finn alla lösningar till ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ -x - 2y = -3 \\ 2x + 4y - 5z = -4 \end{cases} \quad (3p)$$

Lösning:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3}-2\textcircled{1}]{\textcircled{2}+\textcircled{1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3}-\frac{1}{2}\textcircled{2}]{\textcircled{3}-\frac{1}{2}\textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\textcircled{1}+\textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ y = y \\ z = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

där y är en parameter.

3. Den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avbildar $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Beskriv T som en matrisprodukt och ange matrisen. Beräkna även $T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$. (2p)

Lösning:

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \text{ med } A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}. T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

LMA515c Dugga 2, 2017-02-13

Variant 2.

1. Den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avbildar $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Beskriv T som en matrisprodukt och ange matrisen. Beräkna även $T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$. (2p)

Lösning:

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \text{ med } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Finn alla lösningar till ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + 4y - 5z = -1 \\ -x - 2y = -7 \end{cases}. \quad (3p)$$

Lösning:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -5 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3}+\textcircled{1}]{\textcircled{2}-2\textcircled{1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3}-2\textcircled{2}]{\textcircled{3}-\textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\textcircled{1}+\textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 7 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 2y \\ y = y \\ z = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

där y är en parameter.

3. Låt $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Beräkna AB . (1p)

Lösning:

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+6 & -6-3 \\ 2-6 & 6+3 \\ 0+8 & 0-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -4 & 9 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}.$$