LMA515c Dugga 3

2017-02-27 Variant 1.

1. Lös ut X ur matrisekvationen $AXB - XB = A$. Ange speciellt vilka inverser som måste existera. (2p)

Lösning:

$$AXB - XB = A \Leftrightarrow (A-I)XB = A \Leftrightarrow XB = (A-I)^{-1}A \Leftrightarrow X = (A-I)^{-1}AB^{-1}$$

under förutsättning att $(A-I)^{-1}$ och B^{-1} existerar.

2. Avgör med hjälp av determinat-kriteriet för vilka värden på konstanten a som följande ekvationssystem har entydig lösning. Lösningen behöver ej bestämmas.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 3x - y + 2z = -7 \\ -5x + y - az = 9 \end{cases}$$

Lösning: (2p)

Systemet har entydig lösning om och endast om det $A \neq 0$ oavsett högerled.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & -a \end{vmatrix} \underset{②-①}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & -a \end{vmatrix} \underset{\text{utv. rad.}②}{=} -2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = \quad -2(a-2)$$

Så systemet är entydigt lösbart om och endast om $a \neq 2$.

3. Bestäm inversen till matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. (2p)

Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{③+2①}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{③+2②}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{①-3③ \\ ②+③}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{①+2②}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

LMA515c Dugga 3

2017-02-27 Variant 2.

1. Bestäm inversen till matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$. (2p)

Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{②+2① \\ ③-3①}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{③+②}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{①+2③ \\ ②+2③}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Lös ut X ur matrisekvationen $AXB + AX = B$. Ange speciellt vilka inverser som måste existera. (2p)

Lösning:

$$AXB + AX = B \Leftrightarrow AX(B+I) = B \Leftrightarrow X(B+I) = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B(B+I)^{-1}$$

under förutsättning att A^{-1} och $(B+I)^{-1}$ existerar.

3. Avgör med hjälp av determinat-kriteriet för vilka värden på konstanten a som följande ekvationssystem har entydig lösning. Lösningen behöver ej bestämmas.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -5x + ay + z = -3 \\ 3x + 2y - z = 7 \end{cases}$$

Lösning: (2p)

Systemet har entydig lösning om och endast om $\det A \neq 0$ oavsett högerled.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & a & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{③-①}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & a & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{utv. rad.}③}{=} 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 2(2+a)$$

Så systemet är entydigt lösbart om och endast om $a \neq -2$.