MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 2016-04-08 kl. 08.30–12.30

Tentamen | Telefonvakt: Anna Persson

ankn 5325

LMA515c och LMA033b

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2015 och 2016 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (15p)

2. (a) Lös ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ i minsta kvadratmening då $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. (4p)

(b) Hur stort blev minsta kvadrat felet? (2p)

(c) Kontrollera att felvektorn $A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$ är ortogonal mot kolonnerna i A om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen. (2p)

Lösning:

(a) Minstakvadratlösningen fås av normalekvationerna $A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi får $A^TA = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ och $A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$, $\det(A^TA) = 27$ och $(A^TA)^{-1} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ vilket ger minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$.

(b) Felvektorn $A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ ger minsta kvadrat felet $|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}| = \frac{\sqrt{3 \cdot 16}}{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

(c) $A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$ är ortogonal mot kolonnerna i A ty $\frac{4}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ och

$\frac{4}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$. Det är just detta som är innebörden av normalekvationerna.

3. (a) Om A är en inverterbar matris, beskriv $(A^T)^{-1}$ uttryckt i A^{-1}. (1p)

(b) Beräkna A^{-1} och $(A^T)^{-1}$ och verifiera att din formel stämmer för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(3p)

Lösning:

(a) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{3-1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{3-2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{2\leftrightarrow 3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{3-2\,2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

$$\underset{1-2\,3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -3 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right] \underset{1-2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{2-1 \\ 3-1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{2\leftrightarrow 3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{3-2\,2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right] \underset{\substack{1-3 \\ 2-3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Så $(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = (A^{-1})^T.$

4. Planen $\Pi_1 : x + 2y - z = 1$ och $\Pi_2 : 2x - 2y + z = -4$ är givna

(a) Bestäm skärningslinjen mellan planen med hjälp av kryssprodukt. Motivera metoden. (2p)

(b) Bestäm skärningslinjen mellan planen genom att lösa ett ekvationssystem. (2p)

(c) Bestäm vinkeln mellan planen. (2p)

Lösning:

(a) Planen Π_1 och Π_2 har normal $\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ respektive $\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Då linjen ska ligga i båda planen måste den vara vinkelrät mot båda normalerna. En sådan vektor fås av $\mathbf{v}_1 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \hat{x} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \hat{y} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \hat{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$. Vi måste även hitta en gemensam punkt. Vi kan t.ex. sätta $z = 0$ i båda ekvationerna. (Observera att vi inte kan sätta $x = 0$ pga att $\mathbf{v}_1$ är vinkelrät mot $\hat{x}$.) Vi får då $x + 2y = 1$ och $2x - 2y = -4$ som har lösning $x = -1$, $y = 1$. Alltså ligger punkten $P_1 = (-1, 1, 0)$ på linjen. Skärningslinjen ges alltså av $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - 3t \\ z = -6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right] \underset{2-2\,1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -6 \end{array}\right] \underset{-\frac{1}{6}2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{1-2\,2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \frac{1}{2}z \end{cases}.$$

Med parameter $t = -z/6$ fås samma resultat som i (a) uppgiften.

(c) Vinkeln θ mellan planen är samma sak som vinkeln mellan normalerna som ges av sambandet $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = |\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|\cos\theta$. Vi får $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = -3$, $|\mathbf{n}_1| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$, $|\mathbf{n}_2| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$ så $\theta = \arccos\left(\frac{-3}{3\sqrt{6}}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$.

5. (a) Definiera vad som menas med att tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ är linjärt beroende. (2p)

(b) Bestäm för vilka värden på konstanten a som vektorerna (3p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ a \\ 2 \end{bmatrix}$$

blir linjärt beroende.

Lösning:

(a) Tre vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ är linjärt beroende om ekvationen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = 0$ har icketrivial lösning.

(b) Ekvationen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = 0$ kan lösas med Gauss-elimination och då ser man för vilka a som man får parameterlösning. Ett alternativ är att formulera den som en matrisekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ med $A = [\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3]$. På grund av att A är kvadratisk kan man använda determinant-kriteriet för att avgöra ifall A^{-1} existerar som i så fall endast skulle ge trivial lösning. Alltså är vektorerna linjärt beroende omm $\det(A) = 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & a \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2a + 0 + 18 - a + 0 = 24 - 3a = 3(8 - a).$$

Således är vektorerna linjärt beroende omm $a = 8$.

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$ så är $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \operatorname{Proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}) = 0$. (1p)

(b) Om A är en $m \times n$ matris med $m < n$ så har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oändligt många lösningar. (1p)

(c) Om $P = (a, b, c)$ och $Q = (d, e, f)$ är punkter i $\mathbb{R}^3$ så är vektorn $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} a-d \\ b-e \\ c-f \end{bmatrix}$. (1p)

Lösning:

(a) Sant. $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \operatorname{Proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot \left(\mathbf{a} - \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{b}\right) = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0.$

(b) Sant. Systemet är lösbart ty $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är lösning. Då systemet har m rader kan trappstegsformen maximalt ha m pivot-kolonner, så vi måste få minst $n - m > 0$ fria variabler. Alltså har vi minst en fri variabel och lösbart system vilket ger oändligt många lösningar.

(c) Falskt. $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} d-a \\ e-b \\ f-c \end{bmatrix}$.

7. Bestäm projektionen av linjen $-x + 3 = \dfrac{y+1}{2} = z - 3$ på planet $x - y + z = 1$. (4p)

Lösning: Linjen kan skrivas på formen $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$. Insättning i planets ekvation ger skärningspunkten mellan linjen och planet (om det finns en sådan). $3-t-(-1+2t)+3+t = 1 \Rightarrow t = 3$ så $P_1 = (0, 5, 6)$ är skärningspunkten mellan planet och linjen. Linjens riktningsvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och planets normal $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ger den projicerade linjens riktningsvektor $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - \operatorname{Proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 - \dfrac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \dfrac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Vi kan välja $3\mathbf{v}_2$ som riktningsvektor. Den projicerade linjen blir således $\begin{cases} x = -t \\ y = 5 + 4t \\ z = 6 + 5t \end{cases}$.

8. Om $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ motsvarar polynomet $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ och $\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ motsvarar polynomet $b_0 + b_1 x$. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara avbildnigen som motsvarar derivering av andragradspolynom och låt $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildnigen som motsvarar integrering av förstagradspolynom med integrationskonstant $C = 0$.

(a) Visa att avbildningarna F och G är linjära. (1p)

(b) Bestäm matriserna för avbildningarna F och G. (2p)

(c) Bestäm matriserna för sammansättningarna $F \circ G$ och $G \circ F$. Är G invers till F? (2p)

Lösning: $\dfrac{d}{dx}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_2x$ ger $F\left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \end{bmatrix}$.

$\int b_0 + b_1x dx = b_0x + \dfrac{b_1}{2}x^2 + C$ och $C = 0$ som kan skrivas $\int_0^x b_0 + b_1t dt = b_0x + \dfrac{b_1}{2}x^2$ ger $G(\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \\ b_1/2 \end{bmatrix}$.

(a) $\dfrac{d}{dx}((c_1a_0 + c_2a_3) + (c_1a_1 + c_2a_4)x + (c_1a_2 + c_2a_5)x^2) = c_1\dfrac{d}{dx}(a_0 + a_1x + a_2x^2)$ $+c_2\dfrac{d}{dx}(a_3 + a_5x + a_5x^2)$ ger $F\left(c_1\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} c_1a_0 + c_2a_3 \\ c_1a_1 + c_2a_4 \\ c_1a_2 + c_2a_5 \end{bmatrix}\right) =$ $c_1F\left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) + c_2F\left(\begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}\right)$.

$\int_0^x (c_1b_0 + c_2b_2) + (c_1b_1 + c_2b_3)tdt = c_1\int_0^x b_0 + b_1tdt + c_2\int_0^x b_2 + b_3tdt$ ger $G(c_1\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}) = c_1G(\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}) + c_2G(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix})$. Alltså är F och G linjära. Observera att det inte hade fungerat om vi valt integrationskonstanten annorlunda.

(b) $F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ger $F(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ med $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$G(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $G(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ ger $G(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$ med $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

(c) Matrismultiplikation ger $(F \circ G)(\mathbf{v}) = AB\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{v}$ och $(G \circ F)(\mathbf{u}) = BA\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$. Alltså är G inte invers av F.

Hoppas att det gick bra!
Thomas Bäckdahl

Anonym kod	LMA515c och LMA033b 2016-04-08	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Finn alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x - y = -1 \\ -x + 2z = 4 \end{cases}$. (3p)

Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \underset{\substack{②-2①\\③+①}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right] \underset{③+②}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Svar: Systemet är inkonsistent. Lösning saknas.

(b) Bestäm på parameterform linjen som går genom punkterna $A = (1, -2, -3)$ och $B = (2, 1, -1)$. Avgör också om punkten $C = (4, 7, 3)$ ligger på linjen. (3p)

Lösning: Linje med riktning $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, genom A blir $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$.

$t = 3$ ger punkten C.

Svar: Linjen är $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ och C ligger på linjen.

(c) Lös matrisekvationen $AX + X = B$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (4p)

Lösning: $AX + X = B \Leftrightarrow (A+I)X = B \Leftrightarrow X = (A+I)^{-1}B$ om $(A+I)^{-1}$ existerar.

$A + I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\det(A + I) = 1$, $(A + I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$X = (A + I)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Svar: $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Lösning: Utveckla efter andra raden $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 0 - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$ (2p)

$-3(8 - 4) - (2 - 4) = -12 + 2 = -10$.

Svar: -10.

(e) Beräkna kryssprodukten $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ för vektorerna $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lösning: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \hat{x} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \hat{y} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \hat{z} = -6\hat{x} - 3\hat{y} + 3\hat{z}$. (3p)

Svar: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$