MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 2016-08-24 kl. 08.30–12.30

Tentamen | Telefonvakt: Edvin Wedin

ankn 5325

Lösningsförslag LMA515c och LMA033b

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2016 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (15p)

2. (a) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x = -1 \\ 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$ approximativt med minstakvadrat-metoden. (4p)

Lösning: Systemet kan skrivas som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Minstakvadrat-lösningen $\hat{\mathbf{x}}$ löser normalekvationerna $A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi får $A^TA = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, $A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\det(A^TA) = 56$, $(A^TA)^{-1} = \frac{1}{56}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$. Minstakvadrat-lösningen blir $\hat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5/14 \\ 11/14 \end{bmatrix}$.

(b) Hur stort blev minstakvadratfelet? (2p)

Lösning: $A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 21 \\ 5 \\ -1 \\ 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} -7 \\ 19 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Minstakvadratfelet blir $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| = \sqrt{\frac{(-7)^2 + 19^2 + (-1)^2 + 3^2}{14^2}} = \sqrt{\frac{420}{14^2}} = \sqrt{\frac{15}{7}}$.

3. (a) Om A och B är kvadratiska matriser beskriv $\det(AB)$ uttryckt i $\det(A)$ och $\det(B)$. (1p)

Svar: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(b) Beräkna AB, $\det(AB)$, $\det(A)$, $\det(B)$ och verifiera att din formel stämmer för matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3p)

Lösning: $AB = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. $\det(AB) = -18$, $\det(A) = -9$, $\det(B) = 2$, så vi ser att $\det(AB) = -18 = -9 \cdot 2 = \det(A)\det(B)$.

4. (a) Givet punkterna $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 0, 1)$ och $C = (0, 1, -1)$, bestäm planet som går genom punkterna. (3p)

Lösning: Vektorerna $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$ är parallella med planet så

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ är ortogonal mot planet.

Längden på normalen spelar ingen roll, så vi kan välja normal $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Planet går genom punkten A, så planets ekvation blir $2(x-1) + 2(y-2) - (z-3) = 0$ som även kan skrivas $2x + 2y - z = 3$.

(b) Avgör om linjen $x - 4 = y - 3 = \dfrac{z+1}{4}$ är vinkelrät mot planet. (2p)

Lösning: Linjen kan skrivas som $x = 4 + t$, $y = 3 + t$, $z = -1 + 4t$, linjen är parallell med vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = -\overrightarrow{AC}$, så linjen är parallell med planet. Alltså är linjen inte vinkelrät mor planet.

(c) Bestäm vinkeln mellan $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. (2p)

Lösning: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{9} = 9$. Om vinkeln mellan vektorerna är θ så är $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \sin\theta$.

Vi får alltså $\sin\theta = \dfrac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ dvs $\theta = \pi/4$.

5. (a) Bestäm för vilka värden på konstanten a som matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & a \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

är inverterbar.

Lösning: Determinantkriteriet ger att A är inverterbar omm $\det(A) \neq 0$. Beräkning ger $\det(A) = 3 - a$, så A är inverterbar då $a \neq 3$.

(b) Beräkna A^{-1} för $a = 4$. (3p)

Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -5 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -8 & 3 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -6 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -8 \\ -2 & 1 & -5 \\ -3 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

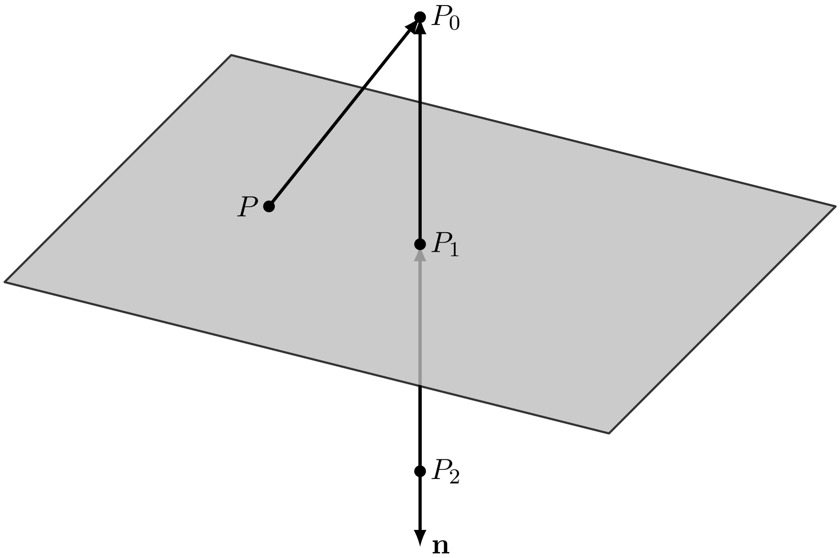
6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.
(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A och B är matriser sådana att $AB = 0$, då måste $A = 0$ eller $B = 0$. (1p)
Svar: Falskt. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ger $AB = 0$, men $A \neq 0$ och $B \neq 0$.

(b) Om vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella så är $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. (1p)
Svar: Sant. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella och $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, så kan vi alltid skriva $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$ för något tal λ. Räkneregler för kryssprodukt ger $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Detta innebär att $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Om $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, så får vi direkt $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(c) Om A är en 4×4 matris så är $\det(-A) = -\det(A)$. (1p)
Svar: Falskt. Om vi bryter ut en faktor -1 från varje rad får vi ett minus tecken från varje rad, dvs. $\det(-A) = (-1)^4 \det(A) = \det(A)$.

7. Bestäm spegelbilden av punkten $(1, 2, 3)$ efter spegling i planet $x - y + z = 1$. (4p)
Lösning: Låt $P_0 = (1, 2, 3)$ och låt $P = (x, y, z)$ vara en punkt i planet, som har normal $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Om P_1 är punkten i planet som ligger närmast P_0, så kommer projektionen av $\overrightarrow{PP_0}$ på normalen vara $\overrightarrow{P_1P_0} = \dfrac{\overrightarrow{PP_0} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\mathbf{n} = \dfrac{(x-1) - (y-2) + (z-3)}{1^2 + (-1)^2 + 1^2}\mathbf{n} = \dfrac{x - y + z - 2}{3}\mathbf{n} = -\dfrac{1}{3}\mathbf{n}$. I sista steget använde vi att P ligger i planet dvs $x - y + z = 1$. Avståndet mellan P_0 och planet är nu $|\overrightarrow{P_1P_0}|$. Vi är intresserad av spegelpunkten P_2 som ligger lika långt från P_1, men på andra sidan. Punkterna P_0, P_1 och P_2 ligger längs normalen. Alltså får vi $\overrightarrow{P_2P_0} = 2\overrightarrow{P_1P_0} = -\dfrac{2}{3}\mathbf{n} = -\dfrac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, så koordinaterna för spegelpunkten är $P_2 = (1 - (-2/3), 2 - 2/3, 3 - (-2/3)) = (5/3, 4/3, 11/3)$.



8. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ och $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildnigarna som ges av $F(a_0, a_1, a_2) = (2a_1, 3a_2)$ och $G(b_0, b_1) = (0, b_0/2, b_1/3)$.

(a) Visa att avbildningarna F och G är linjära. (1p)

Lösning: $F(c_1a_0 + c2a_3, c_1a_1 + c_2a_4, c_1a_2 + c_2a_5) = (2(c_1a_1 + c_2a_4), 3(c_1a_2 + c_2a_5)) = c_1(2a_1, 3a_2) + c_2(2a_4, 3a_5) = c_1F(a_0, a_1, a_2) + c_2F(a_3, a_4, a_5)$ så F är linjär.
$G(c_1b_0 + c_2b_2, c_1b_1 + c_2b_3) = (0, (c_1b_0 + c_2b_2)/2, (c_1b_1 + c_2b_3)) = c_1(b_0/2, b_1/3) + c_2(b_2/2, 3b_3/3) = c_1G(b_0, b_1) + c_2G(b_2, b_3)$ så G är linjär.

(b) Bestäm matriserna för avbildningarna F och G. (2p)

Lösning: Det är lättare att se matrisen ifall vi ser F och G som avbildningar från vektorer till vektorer. Bilderna av standard bas vektorerna blir då $F\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$,
$F\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ och $F\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ ger $F(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ med $A = \begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.
$G(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0\\1/2\\0\end{bmatrix}$ och $G(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0\\0\\1/3\end{bmatrix}$ ger $G(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$ med $B = \begin{bmatrix}0 & 0\\1/2 & 0\\0 & 1/3\end{bmatrix}$.

(c) Bestäm matriserna för sammansättningarna $F \circ G$ och $G \circ F$. Är G invers till F? (2p)

Lösning: Matrismultiplikation ger $(F \circ G)(\mathbf{v}) = AB\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{v}$ och $(G \circ F)(\mathbf{u}) = BA\mathbf{u} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{u}$. Alltså är G inte invers av F.

Hoppas det gick bra!
Thomas Bäckdahl

Anonym kod	Lösningsförslag LMA515c och LMA033b 2016-08-24	sid.

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Finn alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ -x - 2y = -3 \\ 2x + 4y - 5z = -4 \end{cases}$. (3p)

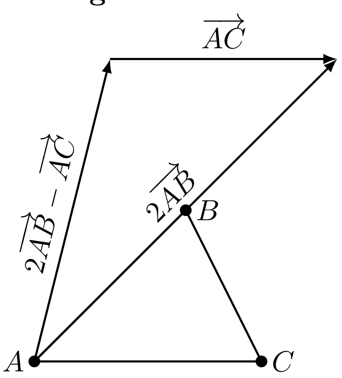
Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Svar: $x = 3 - 2t$, $y = t$, $z = 2$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) Låt A, B, C vara hörn i en triangel. Illustrera i figur vektorn $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ (2p)

Lösning:



(c) Lös matrisekvationen $A^TX - X = B$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. (4p)

Lösning: $A^TX - X = B \Leftrightarrow (A^T - I)X = B \Leftrightarrow X = (A^T - I)^{-1}B$ om $(A^T - I)^{-1}$ existerar. $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $A^T - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\det(A^T - I) = 1$ och $(A^T - I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Svar: $X = (A^T - I)^{-1}B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(d) Avgör om vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$ kan skrivas som linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och ange i så fall den linjärkombinationen. (3p)

Lösning:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Svar: Ja, $\mathbf{u}$ kan skrivas som linjärkombinationen $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

(e) Beräkna projektionen av vektorn $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ på vektorn $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lösning: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 11$. (3p)

Svar: Projektionen av $\mathbf{a}$ på $\mathbf{b}$ är $\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}\mathbf{b} = \dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.