

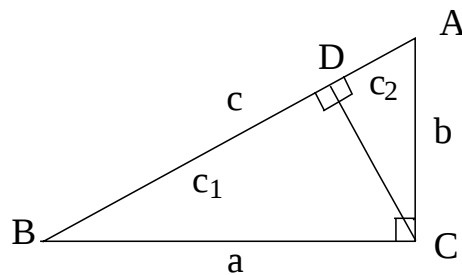
Appendix

De plana triangelsetserna

Pythagoras sats:

I en rätvinklig triangel gäller, med figurens beteckningar:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Bevis:

Vi utnyttjar likformigheten mellan triangelarna ABC , BCD och ACD . Av denna får vi, med figurens beteckningar:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{c_1} \quad \text{och} \quad \frac{c}{b} = \frac{b}{c_2}, \quad \text{vilket ger} \quad cc_1 = a^2, \quad cc_2 = b^2$$

Vi adderar de två senaste likheterna ledvis:

$$cc_1 + cc_2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad c(c_1 + c_2) = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2$$

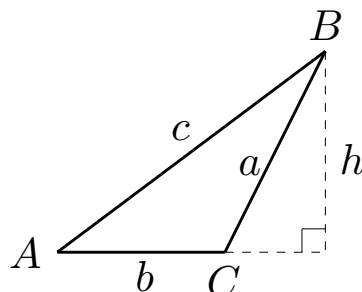
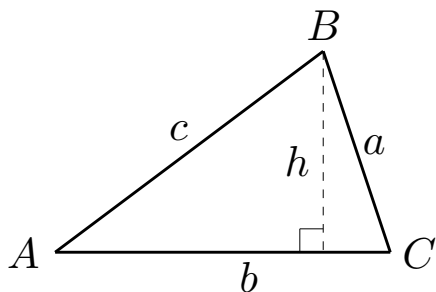
(i sista steget använde vi att $c_1 + c_2 = c$).

□

Areasatsen:

Triangelns area T ges av formeln

$$T = \frac{1}{2} b c \sin A$$

**Bevis:**

I figurerna ser vi att $\sin A = \frac{h}{c}$, oavsett om höjden h ligger invändigt eller utvändigt. Därur får vi $h = c \sin A$. Då är triangelns area $T = \frac{1}{2} b h = \frac{1}{2} b c \sin A$. $\square$

Sinussatsen:

I varje triangel gäller, med gängse beteckningar på sidor och vinklar:

$$\frac{\sin \mathbf{A}}{\mathbf{a}} = \frac{\sin \mathbf{B}}{\mathbf{b}} = \frac{\sin \mathbf{C}}{\mathbf{c}}$$

Bevis:

Areasatsen kan skrivas på tre sätt, alla ger samma resultat:

$$T = \frac{1}{2} b c \sin A = \frac{1}{2} a c \sin B = \frac{1}{2} a b \sin C$$

Om man multiplicerar alla leden med 2 och dividerar dem med abc , så får man

$$\frac{2T}{abc} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

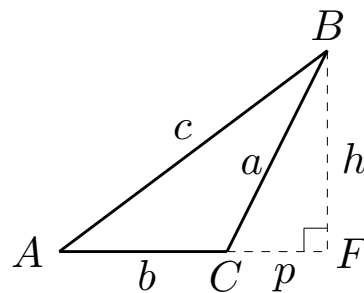
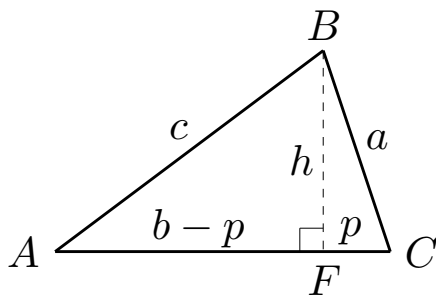
varmed den sinussatsen är bevisad!

□

Cosinussatsen:

I varje triangel gäller, med gängse beteckningar på sidor och vinklar:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

**Bevis:**

Låt b i vanlig ordning stå för sidan AC , och låt p vara sidan CF (med F enligt figurerna). Vi delar in beviset i två fall, beroende på om vinkeln C är spetsig eller trubbig, just så som figurerna visar.

1) I den vänstra triangeln är vinkeln C spetsig, så $\cos C$ är positivt och $p = a \cos C$.

Pythagoras sats på de båda rätvinkliga deltriangelarna ger:

$$a^2 = h^2 + p^2, \quad c^2 = h^2 + (b - p)^2 = h^2 + b^2 - 2bp + p^2 = \{\text{ur den förra likheten}\} = a^2 + b^2 - 2bp$$

Sätter vi in $p = a \cos C$, så får vi cosinussatsens formel.

2) I den högra triangeln är vinkeln C trubbig, alltså är $\cos C$ negativt. Den spetsiga utvändiga vinkeln vid C är $180^\circ - C$, så $p = a \cos(180^\circ - C) = -a \cos C$.

$$a^2 = h^2 + p^2, \quad c^2 = h^2 + (b + p)^2 = h^2 + b^2 + 2bp + p^2 = \{\text{ur den förra likheten}\} = a^2 + b^2 + 2bp$$

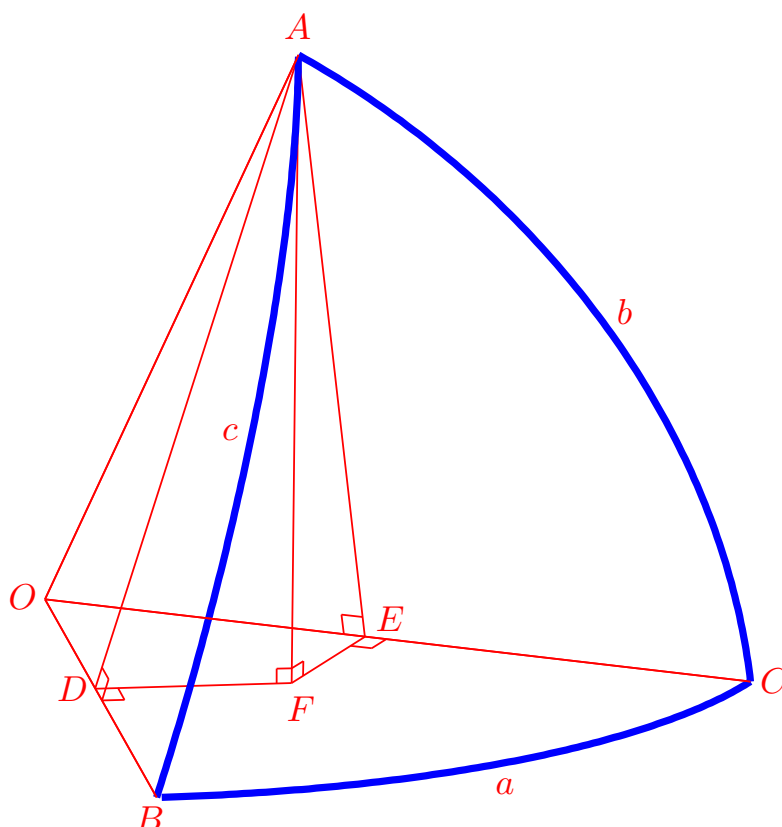
Sätter vi in $p = -a \cos C$, så får vi återigen cosinussatsen. □ □

De sfäriska triangelsatserna

Sfäriska sinussatsen:

I varje sfärisk triangel gäller, med gängse beteckningar på sidor och vinklar:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$



Bevis av den sfäriska sinussatsen, i fallet då sidorna är mindre än 90°.

Vår sfäriska triangel är ABC , centrum i sfären heter O . Låt sfären ha radien 1. Dra höjden från A till planet OBC , dess fotpunkt kallar vi F . Dra höjderna från A till radierna OB och OC och kalla deras fotpunkter D respektive E . Därmed har vi fyra rätvinkliga trianglar att arbeta med: ADO , AEO , AFD och AFE . Vi konstaterar först att $\angle AOD = c$, $\angle AOE = b$, $\angle ADF = B$ och $\angle AEF = C$. Sträckorna AD och AE uttrycks i triangelvinklarna: $AD = \sin c$, $AE = \sin b$. Sträckan AF kan nu uttryckas på två sätt:

$$AF = AD \sin B = AE \sin C \iff \sin c \sin B = \sin b \sin C \iff \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Detta kan göras med vilket par av sidor/vinklar som helst, så vi har därmed fastställt att

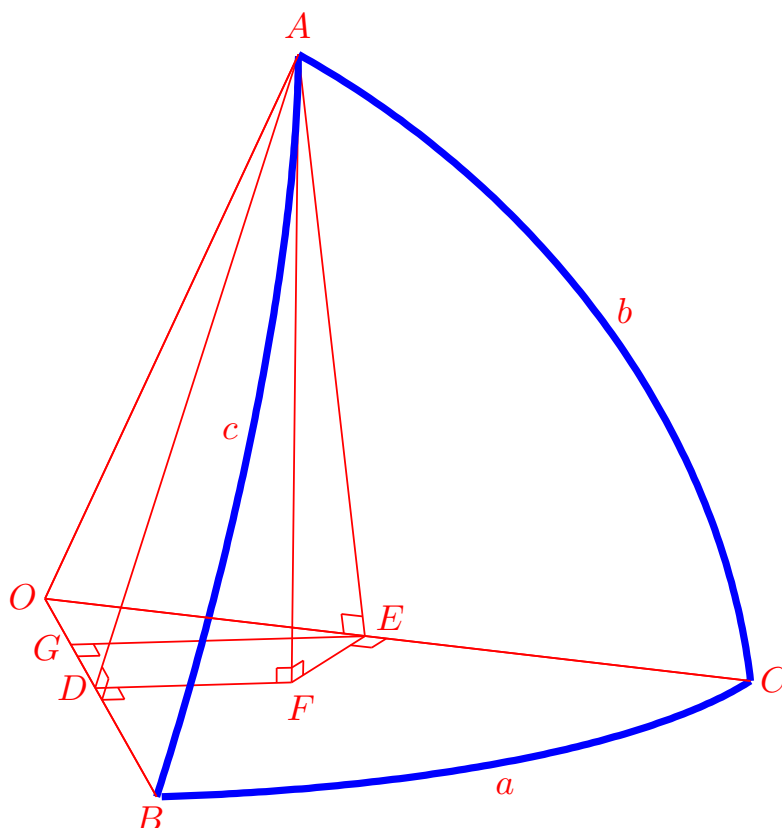
$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

vilket är den sfäriska sinussatsen. □

Sfäriska cosinussatsen:

I varje sfärisk triangel gäller, med gängse beteckningar på sidor och vinklar:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$



Bevis av den sfäriska cosinussatsen, i fallet då sidorna är mindre än 90° .

Beteckningarna i figuren är desamma som i föregående figur, men här har tillkommit en sträcka EG , som är höjden från E mot sidan OB . Den sfäriska cosinussatsen kommer här ur det faktum att

$$OD = OG + GD. \quad (1)$$

För att se hur satsen följer av detta, konstaterar vi först att

$\angle EOB = \angle FEG = a$, $\angle AOE = b$, $\angle AOB = c$ och $\angle AEF = C$.

Vi uttrycker nu sidorna i ekvation (1) med hjälp av dessa vinklar:

$OD = \cos c$, $OG = OE \cos a = \cos b \cos a$, $DG = EF \sin a = AE \cos C \sin a = \sin b \cos C \sin a$.

Därmed uttrycker ekvation (1) sambandet

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

och den sfäriska cosinussatsen är bevisad. □

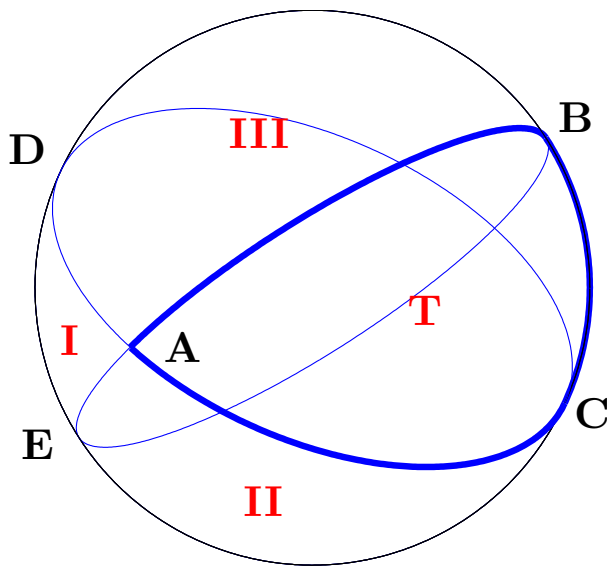
Girards formel

Arean av den sfäriska triangeln är

$$A + B + C - \pi$$

Arean avser den del av enhetssfären som begränsas av triangeln.

Först: två storcirklar avgränsar fyra områden, parvis kongruenta, av sfären. Dessa s.k. *månar* (engelska *lunes*) har arean $2v$ om vinkeln mellan storcirkklarna i den aktuella månen är v . Månens andel av hela sfärens area 4π är ju $\frac{v}{2\pi}$.



Bevis: Om vi betecknar arean av den sfäriska triangeln ABC med T , areorna av de sfäriska triangelarna ADE , ACE , ABD med I , II respektive III , så ser vi att de parvis bildar månar: $T + I = 2A$, $T + II = 2B$, $T + III = 2C$. Detta ger $3T = 2(A + B + C) - (I + II + III) \iff 2T = 2(A + B + C) - (T + I + II + III) = 2(A + B + C) - 2\pi$, det sista eftersom de fyra områdena tillsammans utgör en halv sfär. Därmed $T = A + B + C - \pi$. $\square$