

Vektorer

Detta material bygger på valda och delvis omarbetade delar av kompendiet Vektoralgebra av Hasse Carlsson.

Dessutom har ett helt nyskrivet avsnitt om strömtriangeln lagts in.

Inledning

Du är säkert väl förtrogen med hur (reella) tal kan användas för att beskriva olika storheter inom naturvetenskap, t.ex. längd, temperatur, strömstyrka och fart. Dessa storheter kallas ofta för *skalärer*, till skillnad från de storheter som vi ska kalla vektorer.

Andra storheter har både riktning och storlek. Några sådana exempel är kraft, acceleration, hastighet och magnetfält. Sedan länge har man beskrivit dessa storheter, t.ex. krafter, med hjälp av pilar (riktade sträckor) där pilen pekar i kraftens riktning och pilens längd anger kraftens storlek. Storheter med både riktning och storlek kallas *vektorer*. Vi skall lära oss att räkna med dessa vektorer och på så sätt skapa oss ett verktyg för att angripa problem av många olika slag.

1. Vektorer - definition och räkneoperationer

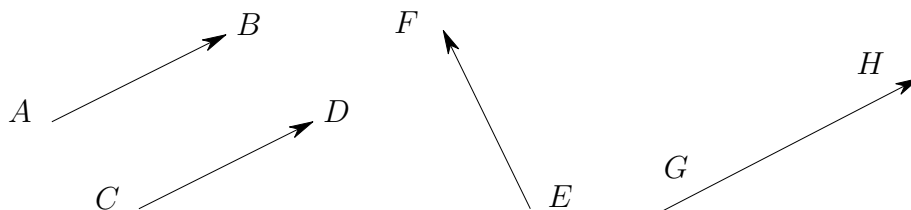
Med ledning av diskussionen i inledningen skall vi definiera vektorer och operationer på vektorer i både planet och rummet. Definitionen bygger på geometriska resultat om t.ex. parallellitet och likformighet. Omvänt kan vi därför genom att räkna med vektorer bevisa geometriska resultat.

Om man studerar hastigheten hos en båt (i synnerhet om vågorna är små) är det naturligt att bara hålla reda på hur den rör sig med avseende på två riktningar; nord-sydlig och öst-västlig. En båt kan t.ex. köra med 12 knop i nordnordvästlig riktning. Om man i stället studerar ett flygplan behöver man också hålla reda på en tredje riktning; nämligen den vertikala. Planet kan stiga 30° med hastigheten 572 km/tim i sydostlig riktning. Man säger därför att planet (inte flygplanet!) är tvådimensionellt och rummet tredimensionellt och vi använder ofta beteckningarna $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ för planet respektive rummet.

Vi skall definiera vektorer i planet och i rummet. Diskussionen i denna och de följande två paragraferna gäller både för vektorer i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$.

Definition 1.1. *Två punkter A och B bestämmer en riktad sträcka från A till B som betecknas $\overrightarrow{AB}$.*

Varje riktad sträcka bestämmer i sin tur en vektor $\mathbf{u}$. Två sträckor som är lika långa och lika riktade bestämmer samma vektor.



I figuren är sträckorna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ lika långa och lika riktade och bestämmer alltså samma vektor $\mathbf{u}$. Vi skriver $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Sträckan $\overrightarrow{EF}$ är lika lång som $\overrightarrow{AB}$ men inte parallell med $\overrightarrow{AB}$. Så om $\mathbf{v} = \overrightarrow{EF}$ är $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Sträckan $\overrightarrow{GH}$ är lika riktad men inte lika lång som $\overrightarrow{AB}$, så om $\mathbf{w} = \overrightarrow{GH}$ är $\mathbf{w} \neq \mathbf{u}$. Eftersom $\overrightarrow{EF}$ och $\overrightarrow{GH}$ varken är lika långa eller lika riktade så är också $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$.

Nollvektorn är den vektor som fås då start- och slutpunkt sammanfaller. Nollvektorn betecknas $\mathbf{0}$ och alltså är $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

Om $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ så är $-\mathbf{u}$ den vektor som är lika lång som $\mathbf{u}$ men motsatt riktad mot $\mathbf{u}$, dvs. $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$.

Längden av vektorn $\mathbf{u}$ betecknas $|\mathbf{u}|$.

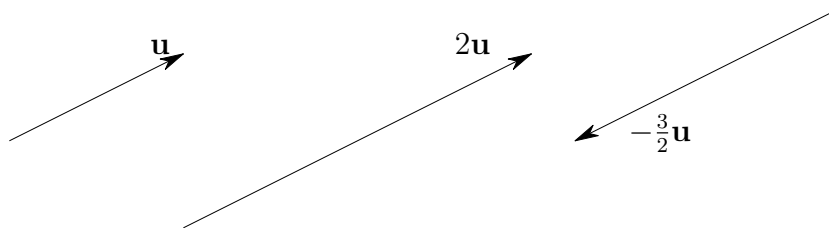
Anmärkning 1.1. Det finns många olika sätt att skriva en bokstav så att man ser att den representerar en vektor. I denna text används fetstil: $\mathbf{u}$, vilket kan vara besvärligt med papper och penna. När man skriver för hand gör man gärna istället bokstaven dubbeltecknad. Vanligt förekommande är också att använda en pil som i de riktade sträckorna i definitionen ovan, dvs $\vec{u}$.

□

1.1. Operationer på vektorer

Multiplikation av en vektor med en skalär

Definition 1.2. Om t är ett reellt tal och $\mathbf{u}$ är en vektor så är $t\mathbf{u}$ den vektor som har längden $|t||\mathbf{u}|$ och är lika riktad som $\mathbf{u}$ om $t > 0$ och motsatt riktad mot $\mathbf{u}$ om $t < 0$. När $t = 0$ är $t\mathbf{u} = \mathbf{0}$.



Exempel 1.1.

- (1) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (2) $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$
 (3) $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$ för alla t och (4) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ för alla $\mathbf{u}$.

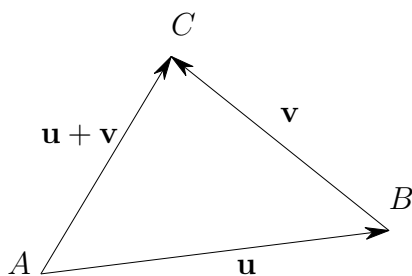
□

Vektorerna $\mathbf{u}$ och $t\mathbf{u}$ är alltså parallella och om $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ så kan varje vektor $\mathbf{v}$ som är parallell med $\mathbf{u}$ skrivas $\mathbf{v} = t\mathbf{u}$ för något t .

Addition av vektorer

Vi skall nu definiera addition av vektorer. Definitionen görs så att kraftparallelogramlagen blir uppfylld.

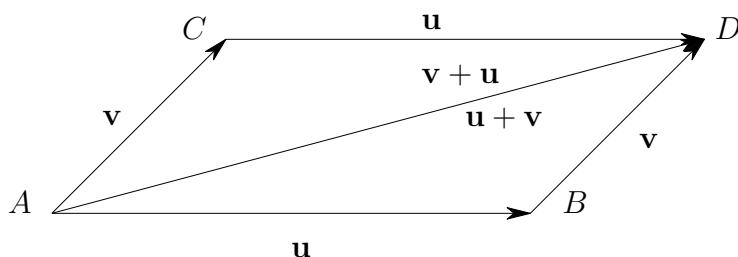
Definition 1.3. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer. Välj tre punkter A, B och C så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$. Då är $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$.



Räkneregler

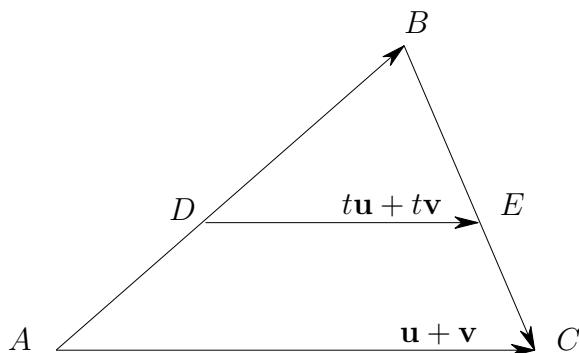
- (1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (kommutativitet),
- (2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (associativitet),
- (3) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$,
- (4) $t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ (distributivitet),
- (5) $(s + t)\mathbf{u} = s\mathbf{u} + t\mathbf{u}$ (distributivitet),
- (6) $s(t\mathbf{u}) = (st)\mathbf{u}$.

Vi visar bara (1) och (4) då $t > 0$, och låter läsaren själv fundera ut varför de övriga är sanna. Kommutativiteten följer ur följande figur.



I parallelogrammen $ABCD$ är $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Så $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

Att (4) gäller följer av likformighet. Antag att $t > 0$ och betrakta trianglarna ABC och DBE där $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$, $t\mathbf{u} = \overrightarrow{DB}$ och $t\mathbf{v} = \overrightarrow{BE}$.



Triangelarna ABC och DBE är likformiga med förhållandet $1 : t$. (Varför?) Så $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{DE}$ är lika riktade och $|\overrightarrow{DE}| = t|\overrightarrow{AC}|$. Det betyder att $\overrightarrow{DE} = t\overrightarrow{AC}$ och

$$t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}.$$

□

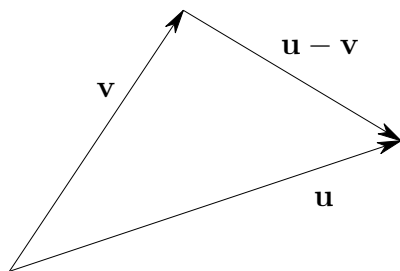
Anmärkning 1.2. Figuren i beviset av (1) visar att addition av vektorer uppfyller parallelogramlagen för krafter. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är krafter så är $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ krafternas resultant; om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ påverkar en partikel så blir effekten densamma som när partikeln bara påverkas av kraften $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

□

Subtraktion av vektorer

Definition 1.4. $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

Vi har $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$, ty om $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ så är $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$. Observera också att $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ löser ekvationen $\mathbf{v} + \mathbf{x} = \mathbf{u}$ eftersom $\mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = (\mathbf{v} - \mathbf{v}) + \mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$. Så om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ placeras så att de startar i samma punkt är $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ den vektor som startar i spetsen av $\mathbf{v}$ och slutar i spetsen av $\mathbf{u}$.

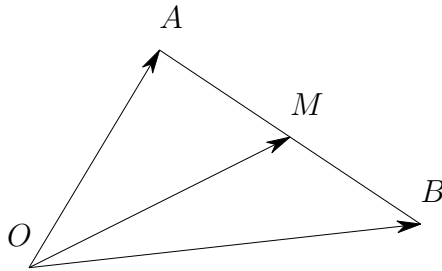


Man kan också se det genom att skriva $\mathbf{u} - \mathbf{v} = -\mathbf{v} + \mathbf{u}$.

En geometrisk tillämpning

Exempel 1.2. Låt O, A och B vara tre punkter. Om M är mittpunkten på sträckan $\overrightarrow{AB}$ så gäller

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \right).$$

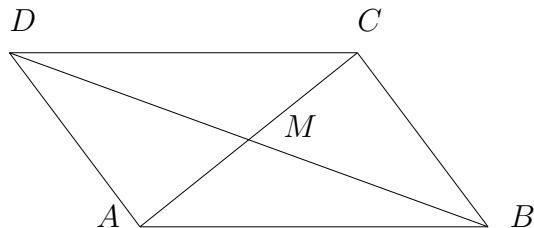


Varför? Jo, eftersom $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, så gäller

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \right) = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB}.$$

□

Exempel 1.3. Diagonalerna i en parallelogram delar varandra mitt itu.



Påståendet innebär att diagonalernas skärningspunkt är mittpunkt både på diagonalen AC och på diagonalen BD . Så här visar man detta:

Låt M vara mittpunkten på diagonalen BD . För att visa påståendet räcker det att visa att M också är mittpunkt på diagonalen AC . (Varför?) Enligt förra exemplet är

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \right).$$

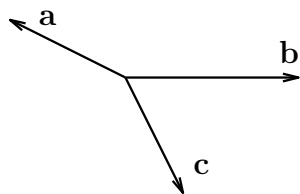
Men $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ så

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \right) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC},$$

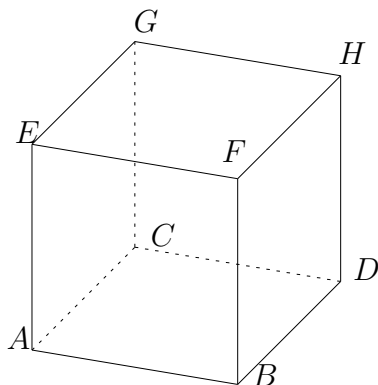
dvs. M är mittpunkt på diagonalen AC .

□

Övning 1.1. Rita (a) $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, (b) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ och (c) $\frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$,
där $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ges av figuren:



Övning 1.2. Låt $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ och $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AE}$ i följande kub.



Bestäm tal x , y och z så att $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ då

(a) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$, (b) $\mathbf{v} = \overrightarrow{EH}$, (c) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AG}$,

(d) $\mathbf{v} = \overrightarrow{HA}$, och (e) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HA}$.

Övning 1.3. En motorbåt går i stillastående vatten med farten 6 m/s. Båten körs i en älv där vattnet strömmar rakt söderut med farten 2 m/s.

- (a) Bestäm båtens hastighet (storlek och fart) om den styrs i rakt östlig riktning.
(b) Vilken kurs skall båten hålla för att röra sig rakt öster ut?

2. Baser och koordinater

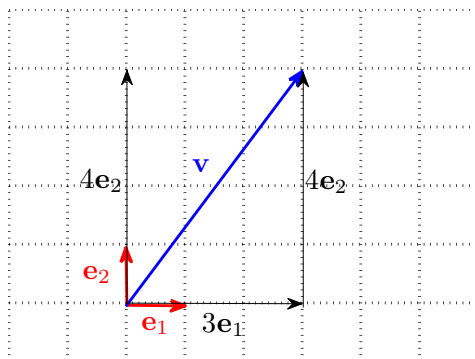
För att göra det mer praktiskt att räkna med geometriska vektorer i planet och rummet skall vi se hur man kan representera dem som par respektive tripplar av reella tal. På så sätt kan man räkna med vektorer på ett enkelt sätt med hjälp av reella tal.

2.1. Bas i planet

Definition 2.1. Två vektorer i planet $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ som har längd 1 och är vinkelräta mot varandra sägs utgöra en ON-bas.

Anmärkning 2.1. ON står för *ortonormerad*, vilket i sin tur är en sammandragning av *ortogonal*, som betyder vinkelrät och *normerad*, som innebär att längden av vektorerna är 1. Rent allmänt krävs av en bas att vektorerna inte är parallella och inte är nollvektorn. I detta kapitel använder vi dock bara ON-baser. $\square$

Låt $\mathbf{v}$ vara en godtycklig vektor. Placera $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{v}$ så att de börjar i samma punkt.



Med den vektor vi valt i figuren ser vi att den kan uppfattas som summan av två vektorer, parallella med var sin basvektor: $\mathbf{v} = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$. Det är lätt att förstå att varje vektor entydigt kan behandlas på detta sätt:

Om $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är en ON-bas i planet så kan varje vektor $\mathbf{v}$ entydigt skrivas

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

Om det är klart vilka basvektorerna är, skriver vi helt kort

$$\mathbf{v} = (x, y)$$

i stället för $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ och kallar x och y för $\mathbf{v}$'s *koordinater* (eller *komponenter*).

Räkneregler för vektorer i koordinatform:

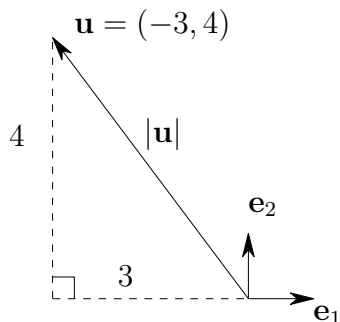
Om $\mathbf{u} = (x, y)$, $\mathbf{v} = (x', y')$ och $t \in \mathbb{R}$ så gäller

$$t\mathbf{u} = t(x, y) = (tx, ty)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

Härledning: Allt följer av räknereglerna för vektorer. Vi har $t\mathbf{v} = t(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = tx\mathbf{e}_1 + ty\mathbf{e}_2 = (tx, ty)$ och $\mathbf{v} + \mathbf{u} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 = (x + x')\mathbf{e}_1 + (y + y')\mathbf{e}_2 = (x + x', y + y')$.

Exempel 2.1. Antag att $\mathbf{u} = (-3, 4)$ i en ON-bas. Hur lång är vektorn $\mathbf{u}$?



Lösning. Vi påminner igen om att $|\mathbf{u}|$ betyder längden av vektorn $\mathbf{u}$. Pythagoras sats ger (se figuren) $|\mathbf{u}|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ så $|\mathbf{u}| = 5$.

Med samma resonemang ser vi generellt att om $\mathbf{u} = (x, y)$ så är

$$|\mathbf{u}|^2 = x^2 + y^2$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

□

Exempel 2.2. Krafterna $\mathbf{F}_1 = (-1, 2)$ och $\mathbf{F}_2 = (2, -3)$ (i Newton) verkar på en partikel. Hur stor är deras sammanlagda verkan?

Lösning. Den resulterande kraften är $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (-1, 2) + (2, -3) = (1, -1)$ så $|\mathbf{F}| = \sqrt{1+1}\text{N} = \sqrt{2}\text{N}$.

□

2.2. Bas i rummet

Vi kan göra om allt i tre dimensioner, bara vi inför en tredje basvektor.

Definition 2.2. Tre vektorer $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ utgör en ON-bas för $\mathbb{R}^3$ om är inbördes vinkelräta och alla har längden 1.

Om $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ är en bas i rummet kan varje vektor $\mathbf{v}$ entydigt skrivas

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

Återigen tillåter vi oss det kortare skrivsättet

$$\mathbf{v} = (x, y, z)$$

där talen x , y , z kallas *koordinaterna* för vektorn $\mathbf{v}$ och vi har räknereglerna

$$t(x, y, z) = (tx, ty, tz) \quad \text{och} \quad (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') .$$

Med hjälp av Pythagoras sats ser vi (hur då?) att i en ortonormerad bas ges en vektors längd av

$$|\mathbf{u}|^2 = |(x, y, z)|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

och

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Övning 2.1. Antag att $\mathbf{u} = (1, 2)$ och att $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 4)$. Vad är då $\mathbf{v}$?

Övning 2.2. Antag att $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 2)$. Bestäm $\overrightarrow{BC}$.

Övning 2.3. Bestäm $\overrightarrow{BC}$ om $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$ och $\overrightarrow{AC} = (2, 1, 3)$.

Övning 2.4. Sätt $\mathbf{u} = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$. Beräkna $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

Övning 2.5. Bestäm ett tal a så att vektorerna $(a, 2 + a, 6)$ och $(2, 1, -3)$ är parallella.

Övning 2.6. Bestäm en vektor $\mathbf{u}$ som har längden 1 och är parallell med $(-1, 2, 2)$.

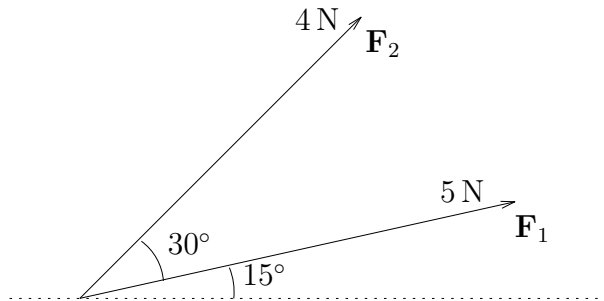
Övning 2.7. Bestäm längderna av vektorerna

(a) $(-1, -2, -3)$, (b) $(1, 1, 1)$ och (c) $(-1, 2, 2)$.

Övning 2.8. Krafterna $\mathbf{F}_1$ och $\mathbf{F}_2$ verkar på en partikel. Bestäm storlek och riktning av krafternas resultant om

(a) $\mathbf{F}_1 = (1, -3, 4)$ och $\mathbf{F}_2 = (5, 9, 2)$,

(b) ges av följande figur:

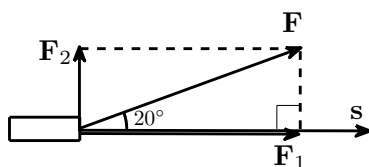


(ON-bas, SI-enheter.)

3. Skalarprodukt

I det här avsnittet skall vi behandla problem som har att göra med vinklar mellan vektorer. Ett viktigt tillämpningsområde är fysiken och vi börjar med ett fysikaliskt exempel.

Exempel 3.1. En låda släpas över ett golv genom att man drar i ett rep som lutar 20° mot horisontalplanet. Den kraft $\mathbf{F}$ som verkar på repet är 200 N i repets riktning. Om lådan släpas 10 m utvecklar kraften ett arbete (som motsvarar den utvecklade friktionsvärmen). Beräkna arbetet.

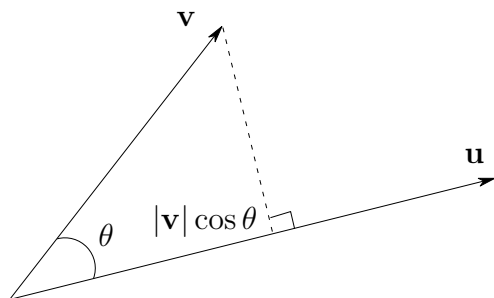


Lösning: Arbetet är produkten av den kraft $\mathbf{F}_1$ som verkar i rörelseriktningen och förflyttningens längd. Vi delar därför upp $\mathbf{F}$ i komponenter $\mathbf{F}_1$ utmed förflyttningen och $\mathbf{F}_2$ vinkelrätt mot denna. Då är $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ och hela arbetet uträttas då av $\mathbf{F}_1$. Om vi ser förflyttningen som en vektor $\mathbf{s}$, så är arbetet

$$W = |\mathbf{F}_1| \cdot |\mathbf{s}| = 200 \cos 20^\circ \cdot 10 J \approx 1879 J$$

□

Efter detta preludium är det dags att definiera *skalärprodukten* mellan två vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. Med *vinkeln* θ mellan vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, (ingen får vara nollvektorn), menas den kortaste vinkeln som den ena vinkeln kan vridas för att få samma riktning som den andra. Vi tänker oss då att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ placeras så att de utgår från samma punkt.



Definition 3.1. Skalärprodukten av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta,$$

där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Om $\mathbf{u}$ eller $\mathbf{v}$ är $\mathbf{0}$ så är $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$.

Observera att definitionen är gjord så att $W = \mathbf{F} \bullet \mathbf{s}$ i det inledande exemplet.

Anmärkning: Skalärprodukten betecknas med en punkt, vilket skulle kunna förväxlas med symbolen för multiplikation av två tal. När det står mellan två vektorer ska det emellertid alltid tolkas som skalärprodukt. För att uppmärksamma den speciella betydelsen, använder vi här en väl tilltagen punkt. I många texter gör man ingen sådan skillnad i punktens utseende, utan sammanhanget får avgöra dess betydelse.

Räkneregler.

- (1) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$ (kommutativitet),
- (2) $(t\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = t(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})$,
- (3) $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$ (distributivitet),
- (4) $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \bullet \mathbf{u}$,
- (5) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$ om och endast om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vinkelräta.

Några viktiga egenskaper hos skalärprodukten:

- Skalärprodukten värde maximalt lika med produkten av de ingående vektorernas längder, detta inträffar då vektorerna har samma riktning.
- Skalärprodukten värde minimalt lika med minus produkten av de ingående vektorernas längder, detta inträffar då vektorerna har motsatta riktningar.
- Skalärprodukten av två vinkelräta vektorer är noll.
- Om vektorerna bildar spetsig vinkel, är deras skalärprodukt positiv.
- Om vektorerna bildar trubbig vinkel, är deras skalärprodukt negativ.

Du bör själv övertyga dig om att (1),(2),(4) och (5) gäller. Räknelag (3) visas i appendix. $\square$

För att praktiskt räkna med skalärprodukt behöver vi veta vad $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ blir i koordinater i en ON-bas.

Skalärprodukten i koordinatform:

Låt $\mathbf{u} = (x, y, z)$ och $\mathbf{v} = (x', y', z')$ i en ON-bas. Då gäller

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = xx' + yy' + zz'$$

I $\mathbb{R}^2$ gäller $(x, y) \bullet (x', y') = xx' + yy'$.

Härledning:

För en ON-bas gäller $\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{e}_3 = 1$ och $\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{e}_3 = 0$. (Varför?) Så

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \bullet (x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3) \\ &= xx'\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_1 + yy'\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{e}_2 + zz'\mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{e}_3 \\ &\quad + (xy' + yx')\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_2 + (xz' + x'z)\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_3 + (yz' + y'z)\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{e}_3 \\ &= xx' + yy' + zz'. \end{aligned}$$

Exempel 3.2. $(3, 3) \bullet (5, 2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 21$. □

Om två vektorer ges i koordinatform (ON-bas) så kan man lätt räkna ut vinkeln mellan dem:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

och vi vet nu hur skalärprodukten och längderna beräknas med hjälp av koordinaterna.

Exempel 3.3. Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$ och $\mathbf{v} = (-2, 1, -2)$.

Lösning. Vi har

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3 \quad \text{och}$$

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 1(-2) + 2 \cdot 1 + 2(-2) = -4$$

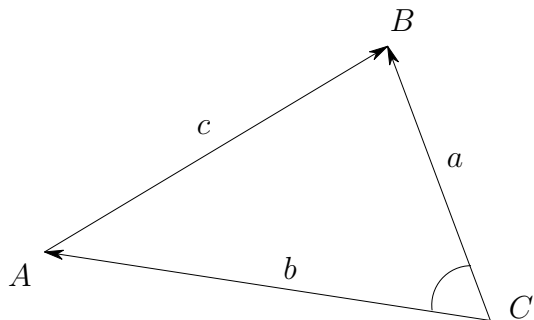
Eftersom $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$ får vi $\cos \theta = -\frac{4}{3 \cdot 3} \approx -0,4444$ och $\theta \approx 116,4^\circ$. □

Exempel 3.4. Vektorerna $(5, 2)$ och $(-2, 5)$ är vinkelräta. Med hjälp av skalärprodukt ser vi detta genast eftersom $(5, 2) \bullet (-2, 5) = 5(-2) + 2 \cdot 5 = 0$. □

Här följer två exempel på hur man kan bevisa vissa geometriska satser med hjälp av skalärprodukt.

Exempel 3.5. Cosinusatsen.

I en triangel gäller $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

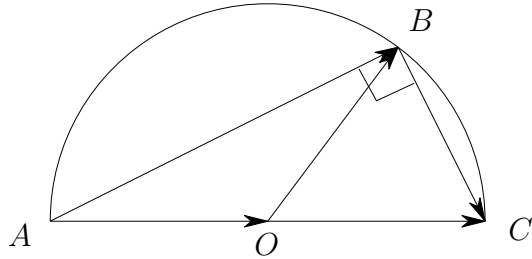


Bevis. Eftersom $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{CB} - \vec{CA}$ och $\vec{CA} \bullet \vec{CB} = ab \cos C$ så är

$$\begin{aligned} c^2 &= \vec{AB} \bullet \vec{AB} = (\vec{CB} - \vec{CA}) \bullet (\vec{CB} - \vec{CA}) \\ &= \vec{CB} \bullet \vec{CB} - \vec{CB} \bullet \vec{CA} - \vec{CA} \bullet \vec{CB} + \vec{CA} \bullet \vec{CA} \\ &= a^2 - 2ab \cos C + b^2. \end{aligned}$$

□

Exempel 3.6. Periferivinkeln i en halvcirkel är rät.



Bevis. Vi skall visa att $\vec{AB} \bullet \vec{BC} = 0$. Men $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$ och $\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC} = \vec{OC} - \vec{OB}$. Så

$$\begin{aligned}\vec{AB} \bullet \vec{BC} &= (\vec{AO} + \vec{OB}) \bullet (\vec{OC} - \vec{OB}) \\ &= \vec{AO} \bullet \vec{OC} - \vec{AO} \bullet \vec{OB} + \vec{OB} \bullet \vec{OC} - \vec{OB} \bullet \vec{OB}.\end{aligned}$$

Eftersom $\vec{AO} = \vec{OC}$ får vi om cirkelns radie är R

$$\vec{AB} \bullet \vec{BC} = \vec{OC} \bullet \vec{OC} - \vec{OC} \bullet \vec{OB} + \vec{OB} \bullet \vec{OC} - \vec{OB} \bullet \vec{OB} = R^2 - R^2 = 0.$$

□

Övning 3.1. Vilka av följande par av vektorer är vinkelräta?

(a) $(-1, 2, 2)$, $(2, 2, -1)$, (b) $(2, 1, 1)$, $(2, 1, -5)$ och (c) $(1, 1, 1)$, $(2, -1, -1)$.

Övning 3.2. Bestäm vinkeln mellan vektorerna (a) $\mathbf{u} = (2, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$,

(b) $\mathbf{u} = (-1, 2, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 4)$ och (c) $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$.

Övning 3.3. Bestäm vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $2\mathbf{b} - \mathbf{a}$ då $\mathbf{a} = (2, -3, 4)$ och $\mathbf{b} = (3, 4, 0)$.

Övning 3.4. Bestäm en vektor som är vinkelrät mot

(a) $(2, -3)$, (b) (a, b) , och (c) $(3, 4, -2)$.

Övning 3.5. En triangel har hörnen $(2, 1, 3)$, $(-1, 4, 2)$ och $(0, 6, 5)$. Är triangeln rätvinklig?

Övning 3.6. Kraften $(3, -4, 2)$ verkar på en kropp som rör sig rätlinjigt från punkten $(-1, 3, 2)$ till

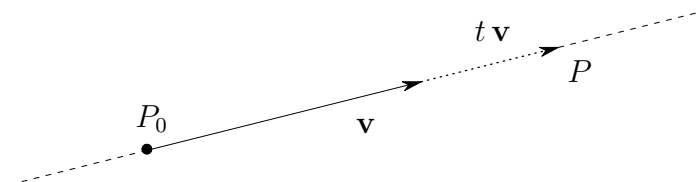
(a) $(1, 4, 5)$, (b) $(-3, 2, 3)$ och (c) $(0, 5, 3)$.

Beräkna ändringen i partikelns rörelseenergi, dvs det arbete som kraften uträttar på partikeln.

4. Räta linjen

I gymnasiet studerar man räta linjens ekvation på formen $y = kx + m$, där k är en konstant som uttrycker hur linjen lutar i förhållande till x-axeln och m ger y-koordinaten för linjens skärningspunkt med y-axeln. En linje som är parallell med y-axeln skrivs istället $x = a$, där a är den gemensamma x-koordinaten för linjens alla punkter. Detta kan repeteras i Sommarmatte 1 (finns tillgänglig på kurshemsidan), avsnitt 3.2. Här ska vi se ett annat sätt att beskriva räta linjen, där vi tar hjälp av vektorer. I detta avsnitt löser vi också några ekvationssystem, så det kan behövas en repetition av hur man löser sådana: se Ekvationer, avsnitt 2.4 (som är hämtat från Sommarmatte del 1).

En (rät) linje i $\mathbb{R}^2$ bestäms av en punkt P_0 på linjen och en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ som anger linjens riktning. Vektorn $\mathbf{v}$ kallas för en *riktningsvektor* för linjen.



En godtycklig punkt på linjen kan skrivas

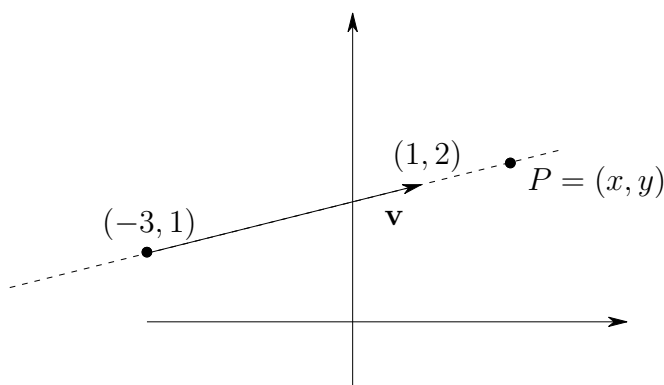
$$P = P_0 + t\mathbf{v},$$

för något reellt tal t . Om $P_0 = (x_0, y_0)$, $\mathbf{v} = (a, b)$ och $P = (x, y)$ så gäller $(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b)$ eller

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb. \end{cases}$$

Detta kallas för linjens ekvation på *parameterform*.

Exempel 4.1. Bestäm ekvationen för linjen genom punkterna $(1, 2)$ och $(-3, 1)$.
Lösning.



Vektorn $\mathbf{v}$ från $(-3, 1)$ till $(1, 2)$ är en riktningsvektor för linjen. Vi har $\mathbf{v} = (1, 2) - (-3, 1) = (4, 1)$. Så om $P_0 = (-3, 1)$ ger $P = P_0 + t\mathbf{v}$

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 1 + t. \end{cases}$$

Anm: Genom att lösa ut t ur andra ekvationen, $t = y - 1$ och sätta in detta i den första, $x = -3 + 4(y - 1)$, kan vi få ut den tidigare kända $y = kx + m$ -varianten: $y = \frac{1}{7}x + \frac{4}{7}$. $\square$

Exempel 4.2. Var skär linjerna

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \end{cases}$$

varandra?

Lösning: Observera att parametrarna t i de båda ekvationerna är oberoende av varandra. Om vi vill hantera två linjer samtidigt, bör vi därför ha olika namn på parametern, ta t. ex. s i den första och t i den andra. Om (x, y) ligger på båda linjerna måste det då finnas ett s och ett t så att $(x, y) = (1 + s, 2 + 2s)$ och $(x, y) = (-1 + t, t)$. Detta ger

$$\begin{cases} 1 + s = -1 + t \\ 2 + 2s = t \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} s - t = -2 \\ 2s - t = -2 \end{cases}.$$

Subtraherar vi den första ekvationen från den andra får vi det ekvivalenta ekvationssystemet

$$\begin{cases} s - t = -2 \\ s = 0 \end{cases},$$

som har lösningen $s = 0, t = 2$. Detta ger $x = 1, y = 2$ så linjernas skär varandra i punkten $(1, 2)$. $\square$

För att beskriva samtidig rörelse av två partiklar längs två räta linjer, behöver man dock ha en gemensam parameter t (tiden). Om skärningspunkten mellan linjerna svarar mot samma värde på t innebär detta att vi har kollision mellan partiklarna i den tidpunkten. Om skärningspunkten svarar mot olika t , betyder det alltså att partiklarna befinner sig i skärningspunkten vid olika tidpunkter. För fartyg som rör sig i rätlinjiga kurser måste man i princip också också ta hänsyn till fartygens längder.

Exempel 4.3. I ett koordinatsystem (skala i nautiska mil) har fartyg A vid tiden $t = 0$ (tids-enhet timmar) positionen $(7, -26)$ och hastighetsvektorn $(7, 11)$ (enhet knop). Fartyg B har vid tiden $t = 0$ positionen $(74, -7)$ och hastighetsvektorn $(-8, 9)$. Kommer de båda fartygen att kollidera om de fortsätter med oförändrade kurser och hastigheter?

Lösning: Vi tecknar först de båda linjerna i parameterform

$$\begin{cases} x = 7 + 7t \\ y = -26 + 11t \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = 74 - 8t \\ y = -7 + 9t \end{cases}$$

Vi byter nu namn på parametern i fartyg B:s linje, säg s . Då får vi följande ekvationer för skärningspunkten:

$$\begin{cases} 7 + 7t = 74 - 8s \\ -26 + 11t = -7 + 9s \end{cases} \iff \begin{cases} 8s + 7t = 67 \\ 9s - 11t = -19 \end{cases} \iff \begin{cases} 88s + 77t = 737 \\ 63s - 77t = -133 \end{cases}$$

Addera ekvationerna ledvis: $151s = 604$ ger $s = 4$. Efter insättning i t. ex. $8s + 7t = 67$ får vi ut $t = 5$. Vi får nu skärningspunkten genom insättning i linjernas ekvationer: $x = 7 + 7t = 42$, $y = -26 + 11t = 29$ respektive $x = 74 - 8s = 42$, $y = -7 + 9s = 29$. Linjernas skärningspunkt är alltså $(42, 29)$. Eftersom t och s står för tider så befinner sig fartyg A i skärningspunkten efter exakt 5 timmar, medan fartyg B når platsen efter 4 timmar. Eftersom tidsskillnaden är så stor, behöver vi inte blanda in fartygens längder, men man kan annars med hjälp av farter och fartyglängder räkna ut mellan vilka tidpunkter för- och akterstäv hos respektive fartyg befinner sig i skärningspunkten och se om dessa tidsintervall går in i varandra. $\square$

Övning 4.1. Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkterna $(0, 3)$ och $(-1, 1)$.

Övning 4.2. Bestäm linjen genom punkterna $(1, 2)$ och $(-2, 3)$ på parameterform och parameterfri form.

Övning 4.3. Vad är ekvationen för den linje som går genom punkten $(2, 1)$ och är vinkelrät mot linjen $3x + y = 3$?

Övning 4.4. Var skär linjerna $(x, y) = (1, 0) + t(1, -3)$ och $(x, y) = (2, 3) + t(2, -3)$ varandra?

Övning 4.5. Bestäm skärningspunkten för de två linjerna $L_1 : (x, y, z) = (1, 0, 4) + t(1, -1, 2)$ och $L_2 : (x, y, z) = (0, 1, 0) + t(1, -1, 3)$. Detta är rätta linjer i $\mathbb{R}^3$ - deras parameterekvationer är helt analoga med fallet $\mathbb{R}^2$ som vi behandlat i detta avsnitt.

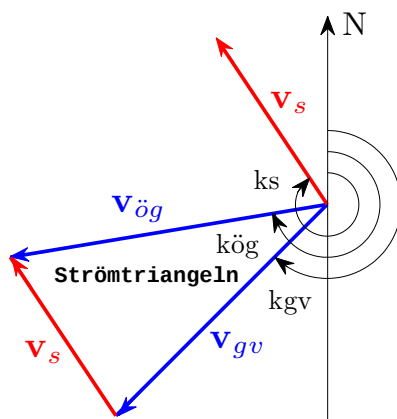
Övning 4.6. En partikel rör sig rätlinjigt med konstant hastighet. Den startar i punkten $(1, 2, 3)$. Efter en halv minut befinner den sig i $(2, 2, 2)$. Var befinner den sig efter 10 minuter?

Övning 4.7. Måste två ickeparallella linjer i (a) $\mathbb{R}^2$, (b) $\mathbb{R}^3$, skära varandra?

5. Strömtriangeln

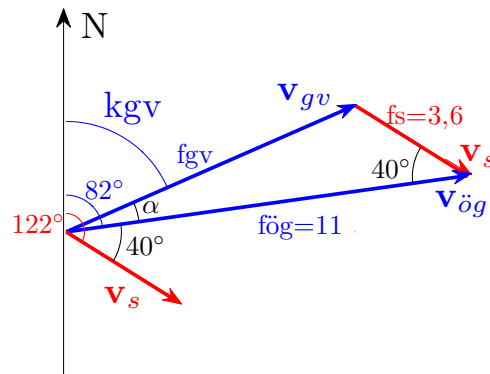
Som tidigare nämnts är hastighet ett exempel på en vektorstorhet. För att fullständigt beskriva en hastighet, behöver man ange dess storlek och dess riktning. I fysiken talar man om *hastighet* när man menar vektorn och om *fart* när man menar dess storlek: exempelvis farten 5 m/s och riktningen sydost i markplanet. Till sjöss anger man riktningen som *kursen*, dvs vinkeln räknad medurs i förhållande till nordriktningen (åtminstone så länge man har hastigheter i horisontalplanet). Riktningar för hastigheter hos fartyg och vattenströmmar avser alltid *mot* vilket håll rörelsen sker, men märkligt nog är det omvänt när det gäller vindar: riktningen hos en vindhastighet avser vilket håll vinden kommer *ifrån*.

För ett fartyg finns tre för dess rörelse intressanta hastigheter: $\mathbf{v}_{gv}$ = hastigheten genom vattenet, $\mathbf{v}_{ög}$ = hastigheten över grund och $\mathbf{v}_s$ = strömmens hastighet. Deras storlekar betecknas $fgv = |\mathbf{v}_{gv}|$ = farten genom vattenet, $fög = |\mathbf{v}_{ög}|$ = farten över grund och $fs = |\mathbf{v}_s|$ = strömmens fart. Deras kurser betecknas kgv = kursen genom vattenet, $kög$ = kursen över grund och ks = strömmens kurs. Sambandet mellan dem är en vektoraddition: $\mathbf{v}_{ög} = \mathbf{v}_{gv} + \mathbf{v}_s$.



När man räknar på dessa hastigheter är det ofta praktiskt att sätta dem i en triangel, som figuren visar. Triangeln illustrerar vektoradditionen och sedan är det som gjort för att använda våra triangelnsatser.

Exempel 5.1. Från ett fartyg ser man en ö i kursen 82° . Strömmens fart är 3,6 knop och dess riktning är 122° . Beräkna den fart och kurs fartyget ska hålla genom vattnet om dess rörelse över grund ska vara riktad rakt mot ön med farten 11 knop.



Lösning: Vi känner alltså $f_{og} = 11$ knop, $k_{og} = 82^\circ$, $f_s = 3,6$ knop, $k_s = 122^\circ$ (se figuren). Vi vill beräkna f_{gv} och k_{gv} . Först konstaterar vi att en av strömtriangelns vinklar är $k_s - k_{og} = 122^\circ - 82^\circ = 40^\circ$ (de röda pilarna är ju parallella!). Med hjälp av cosinussatsen kan vi nu beräkna f_{gv} :

$$(f_{gv})^2 = 11^2 + 3,6^2 - 2 \cdot 11 \cdot 3,6 \cos 40^\circ$$

$$f_{gv} \approx 8,56$$

Nu kan vi få triangelvinkel $\alpha = k_{og} - k_{gv}$ med sinussatsen:

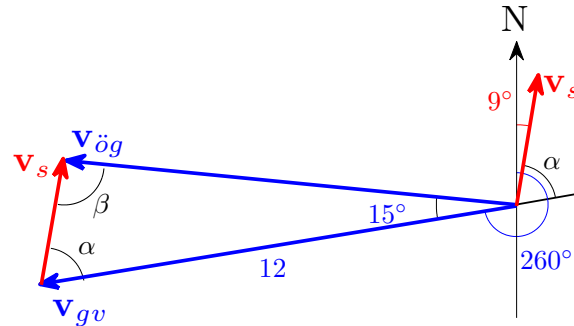
$$\frac{\sin \alpha}{3,6} = \frac{\sin 40^\circ}{f_{gv}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3,6 \sin 40^\circ}{f_{gv}} \Rightarrow \alpha \approx 15,7^\circ$$

Därmed är $k_{gv} = k_{og} - \alpha \approx 82^\circ - 15,7^\circ = 66,3^\circ$.

Svar: Håll farten 8,6 knop och kursen 66° genom vattnet.

□

Exempel 5.2. Ett fartyg rör sig med farten 12 knop genom vattnet och i kompassriktningen 260° (=kgv). Strömmens riktning är 9° och fartygets rörelseriktning gentemot land är 275° (=kög). Beräkna farten över grund och strömmens fart.



Lösning: Om vi kan bestämma strömtriangelns vinklar, kan vi också bestämma dess återstående sidor, och det är ju dessa som söks. En av vinklarna är kög-kgv= 15° . Om vi förlänger $\mathbf{v}_{gv}$ åt motsatt håll, får vi en linje i kurs kgv- $180^\circ = 80^\circ$. Vi kan då se att $\alpha = 80^\circ - ks = 71^\circ$. Därmed blir den återstående vinkeln $\beta = 180^\circ - 15^\circ - 71^\circ = 94^\circ$. Sinussatsen säger nu

$$\frac{fg}{\sin 71^\circ} = \frac{fs}{\sin 15^\circ} = \frac{12}{\sin 94^\circ}$$

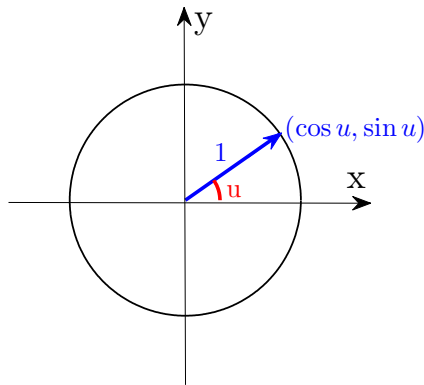
vilket ger

$$fg = \frac{12 \sin 71^\circ}{\sin 94^\circ} \approx 11,37 \quad fs = \frac{12 \sin 15^\circ}{\sin 94^\circ} \approx 3,11$$

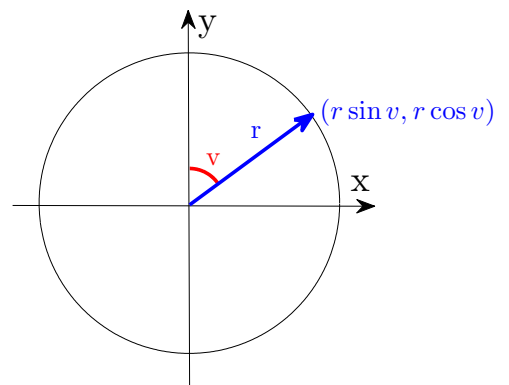
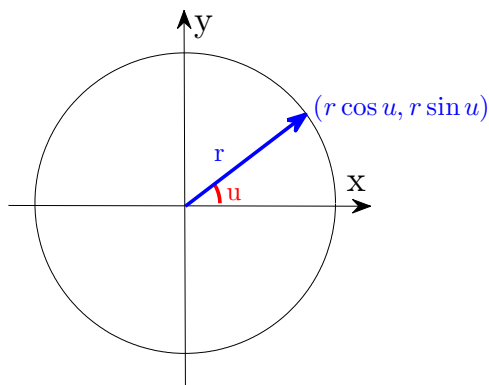
Svar: Farten över grund är 11,4 knop, strömmens fart är 3,1 knop. □

Hastigheter i koordinatform

Ett annat sätt att behandla hastigheterna i föregående avsnitt är att använda de trigonometriska funktionerna för att beskriva x- och y-koordinaterna separat. Vi repeterar definitionen av sinus och cosinus i enhetscirkeln. En punkt på enhetscirkeln med riktningsvinkeln u enligt vår vinkelkonvention (utgå från x-axeln, positiv vinkel moturs, negativ medurs) kan också beskrivas med en vektor från origo till punkten. Denna vektor får då koordinaterna $(\cos u, \sin u)$.



Om vi byter till en annan cirkel med radie r och medelpunkt i origo, blir koordinaterna $(x, y) = (r \cos u, r \sin u)$. r och u kallas *polära koordinater* för punkten/vektorn, till skillnad från de vanliga *rektangulära koordinaterna* x och y . Om vi väljer att använda sjöfartens vinkelmätning där kursen v räknas från y-xeln (nordriktningen) medurs, så behöver vi bara byta plats på sinus och cosinus. Då gäller nämligen att $\cos u = \sin v$ och $\sin u = \cos v$.



Exempel 5.3. Vi testar detta sätt att räkna på exempel 5.1. Här kan vi ge de kända hastigheterna i koordinatform:

$$\mathbf{v}_{ög} = (11 \sin 82^\circ, 11 \cos 82^\circ), \quad \mathbf{v}_s = (3.6 \sin 122^\circ, 3.6 \cos 122^\circ)$$

Eftersom $\mathbf{v}_{ög} = \mathbf{v}_{gv} + \mathbf{v}_s$, så har vi

$$\mathbf{v}_{gv} = \mathbf{v}_{ög} - \mathbf{v}_s = (11 \sin 82^\circ - 3.6 \sin 122^\circ, 11 \cos 82^\circ - 3.6 \cos 122^\circ) \approx (7.84, 3.44)$$

Genom att använda dessa koordinater (a, b) kan vi (rita figur!) bestämma både fart och kurs:

$$f_{gv} = |\mathbf{v}_{gv}| = \sqrt{a^2 + b^2} \approx 8,56$$

$$\tan(k_{gv}) = \frac{a}{b} \Rightarrow k_{gv} \approx 66,3^\circ$$

Om någon av koordinaterna blir negativ (då blir kursen en vinkel större än 90°), är det extra viktigt att rita figur, så att man får kursen rätt.

Ett annat sätt att beräkna kursen, är att använda skalärprodukten. T. ex. kan vi beräkna vinkeln α mellan $\mathbf{v}_{ög}$ och $\mathbf{v}_{gv}$:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{v}_{ög} \bullet \mathbf{v}_{gv}}{|\mathbf{v}_{ög}| |\mathbf{v}_{gv}|} = \frac{(10.89, 1.53) \bullet (7.84, 3.44)}{11 \cdot 8.56} \approx 0.963 \Rightarrow \alpha \approx 15,7^\circ, \quad k_{gv} = k_{ög} - \alpha \approx 66,3^\circ$$

Vinkeln α blir då automatiskt rätt, oberoende av kvadranten. □

I exempel 5.2 är det svårare att räkna på detta sätt, eftersom vi inte har någon av vektorerna bestämd till både längd och riktning.

Övning 5.1. Ett fartyg håller kursen 178° relativt land och 172° över vatten, farten över grund är 17.0 knop och farten genom vatten är 18.0 knop. Beräkna strömmens fart och riktning.

Övning 5.2. Ett fartyg håller farten 16 knop och kursen 185° , båda i förhållande till vattnet. Strömmen har vid detta tillfälle farten 3,6 knop och kursen 123° . Beräkna fartygets fart och kurs över grund.

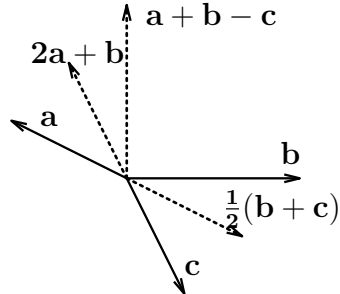
Övning 5.3. Ett fartyg mäter upp sin fart och kurs till 15 knop och 255° gentemot land, strömmens fart och kurs är 4,2 knop och 193° . Beräkna fartygets fart och kurs genom vattnet.

Övning 5.4. Ett fartyg mäter upp sin fart och kurs genom vattnet till 10 knop och 80° . Farten över grund är 9 knop och strömmens fart är 3 knop. Beräkna fartygets kurs över grund och strömmens fart.

Facit

Avsnitt 1: Vektorer - definition och räkneoperationer

1.



2. (a) $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, (b) $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, (c) $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, (d) $-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, (e) $-\mathbf{e}_1$

3. (a) Med farten $\sqrt{40} \approx 6,32$ m/s i kursen $108,4^\circ$, (b) $70,5^\circ$

Kurserna i denna uppgift är mätta från nordriktningen medurs (enligt konventionen till sjöss).

Avsnitt 2: Baser och koordinater

1. (2, 2)

2. (1, 1)

3. (1, -1, 2)

4. (-8, 7, -9)

5. $a = -4$

6. $\mathbf{u} = \pm \frac{1}{3}(-1, 2, 2)$

7. (a) $\sqrt{14}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) 3

8. (a) $6\sqrt{3} \approx 10,4$ N i riktningen (1, 1, 1), (b) 8,70 N i $28,3^\circ$ med avseende på ö-axeln

Avsnitt 3: Skalärprodukt

1. Alla är vinkelräta.

2. (a) 90° , (b) 45° , (c) $\approx 44.4^\circ$

3. 128°

4. T.ex. (a) $(3, 2)$, (b) $(b, -a)$ och (c) $(0, 1, 2)$
5. Ja, vinkeln vid $(-1, 4, 2)$ är rät.
6. (a) 8 joule, (b) 0 joule, och (c) -3 joule

Avsnitt 4: Räta linjen

1. $-2x + y = 3$
2. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases} ; \quad x + 3y = 7$
3. $3y - x = 1$
4. $(-2, 9)$
5. $(2, -1, 6)$
6. $(21, 2, -17)$
7. (a) Ja. (b) Nej

Avsnitt 5: Strömtriangeln

1. $fs = 2.1\text{knop}$, $ks = 294^\circ$
2. Fart över grund 18 knop, kurs över grund 175° .
3. Farten genom vattnet är 13,5 knop, kursen genom vattnet är $kgv=271^\circ$.
4. $kg = 80^\circ - 17.1^\circ = 62.9^\circ$, $ks = 260^\circ + 62.2^\circ = 322.2^\circ$
 eller (det finns två tolkningar av problemet!)
 $kg = 80^\circ + 17.1^\circ = 97.1^\circ$, $ks = 260^\circ - 62.2^\circ = 197.8^\circ$