

LNC022 2012-08-20 Lösningar

- Minsta vinkeln v står mot minsta sidan 3. Använder vi tangens, får vi $\tan v = \frac{3}{4} \Rightarrow v \approx 36,9^\circ$.
 - Trigonometriska ettan $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ger $\cos v = \pm \sqrt{1 - 0,555^2} \approx \pm 0,832$. Eftersom cosinus är negativt för vinklar mellan 90° och 180° , så är $\cos v \approx -0,832$. (Man kan förstås också beräkna vinkeln med hjälp av räknaren, om man väljer rätt lösning till sinusekvationen, och sedan ta cosinus på räknaren.)
 - Kateterna blir $12 \cos 18^\circ \approx 11,4 \text{ cm}$ och $12 \sin 18^\circ \approx 3,7 \text{ cm}$.
 - $w = 3u - 2v = 3(3,8) - 2(2,6) = (9,24) - (4,12) = (5,12)$, $|w| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

- Resultanten av F_1 och F_2 blir i koordinatform $F_1 + F_2 = (3,3) + (2,-1) = (5,2)$. För att resultanten av alla tre ska bli nollvektorn, måste $F_3 = (-5,-2)$. Krafternas storlekar blir nu $|F_1| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} \approx 4,24$, $|F_2| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \approx 2,24$, $|F_3| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29} \approx 5,39$.

Vinkeln α mellan F_2 och F_3 kan beräknas med hjälp av skalärprodukten:

$$\begin{cases} F_2 \bullet F_3 = |F_2||F_3| \cos \alpha = \sqrt{5}\sqrt{29} \cos \alpha \\ F_2 \bullet F_3 = (2,-1) \bullet (-5,-2) = 2 \cdot (-5) + (-1) \cdot (-2) = -8 \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-8}{\sqrt{5}\sqrt{29}} \Rightarrow \alpha \approx 131,6^\circ$$

Svar: Krafternas storlekar är **4,2 N**, **2,2 N**, **5,4 N**, den sökta vinkeln är **132°**.

- Eftersom $A = 91^\circ$ måste vara den största vinkeln, står den mot längsta sidan $a = 19 \text{ cm}$. Vinkeln B står mot sidan $b = 12 \text{ cm}$. Med sinussatsen kan vi beräkna vinkeln B , som måste vara spetsig.

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \iff \frac{\sin B}{12} = \frac{\sin 91^\circ}{19} \iff \sin B = \frac{12 \sin 91^\circ}{19} \Rightarrow B \approx 39,16^\circ$$

Ur vinkelsumman får vi den återstående vinkeln $C = 180^\circ - A - B \approx 49,84^\circ$, varefter triangelarean beräknas med areasatsen: $T = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot 12 \sin C \approx 87 \text{ cm}^2$.

- Vi har en sfärisk triangel med sidor $a = 117^\circ$ och $b = 68^\circ$, vinkeln $C = 103^\circ$. Cosinussatsen ger först den tredje sidan, därefter de återstående vinklarna:

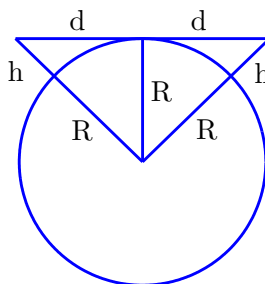
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \Rightarrow c \approx 110,85^\circ$$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \Rightarrow A \approx 111,72^\circ$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} \Rightarrow B \approx 75,18^\circ$$

Återstående sidan är $\approx 111^\circ$, återstående vinklar är $\approx 112^\circ$ och $\approx 75^\circ$.

- Vi ritar en figur (med starkt överdrivna satellithöjder).

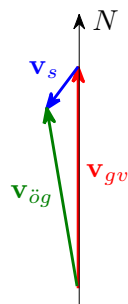


I figuren finns två kongruenta rätvinkliga trianglar med sidorna $R = 6370 \text{ km}$, $R + h = 6570 \text{ km}$ och d , det avstånd som söks är $2d$. Pythagoras sats:

$$d^2 + R^2 = (R + h)^2 \Rightarrow d^2 = (R + h)^2 - R^2 \Rightarrow d \approx 1608,7$$

Avståndet är alltså $2d \approx 3220 \text{ km}$.

6. (a) Situationen visas i figuren. $f_{gv} = |\mathbf{v}_{gv}| = 15$, $f_{ög} = |\mathbf{v}_{ög}| = 12$, vinkeln mellan de båda fartygskurserna är 10° (längst ner i strömtriangeln).



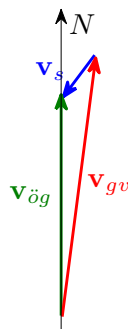
Strömmens fart $f_s = |\mathbf{v}_s|$ beräknas med cosinussatsen. Dess riktning är $180^\circ + \alpha$, där α är vinkeln i strömtriangelns topp. Vinkeln v får man med sinussatsen sedan f_s beräknats.

$$f_s^2 = 15^2 + 12^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12 \cos 10^\circ \Rightarrow f_s \approx 3,80$$

$$\frac{\sin \alpha}{12} = \frac{10^\circ}{f_s} \Rightarrow \alpha \approx 33,2^\circ$$

Så vi får strömmens fart till **3,8** knop och dess kurs till **ks = $180^\circ + \alpha \approx 213^\circ$** .

- (b) Den nya situationen kräver en ny figur. Nu är $f_{ög} = |\mathbf{v}_{ög}| = 15$, $f_s = |\mathbf{v}_s| \approx 3,8$, vinkeln i övre vänstra hörnet av strömtriangeln (vid pilspetsarna som möts) är $\beta = 180^\circ - \alpha \approx 146,78^\circ$, där α är vinkeln från (a).



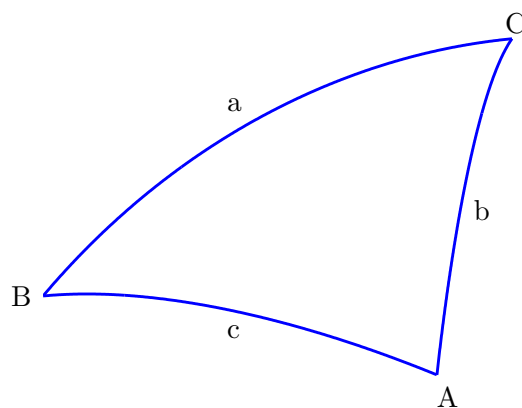
Denna gången får vi först f_{gv} med cosinussatsen, sedan vinkeln γ mellan fartygskurserna (som är lika med k_{gv}) med sinussatsen:

$$f_{gv}^2 = 15^2 + f_s^2 - 2 \cdot 15 \cdot f_s \cdot \cos \beta \Rightarrow f_{gv} \approx 18,30$$

$$\frac{\sin \gamma}{f_s} = \frac{\sin \beta}{f_{gv}} \Rightarrow \gamma \approx 6,54^\circ$$

varmed **fgv ≈ 18 knop, kgv $\approx 7^\circ$** .

7. (a) Vi betraktar en sfärisk triangel med hörn A i La Coruña, B i Halifax och C i nordpolen.



Vi känner då sidorna $a = 90^\circ - 44^\circ 40' = 45^\circ 20'$, $b = 90^\circ - 43^\circ 22' = 46^\circ 38'$ samt vinkeln $C = 63^\circ 37' - 8^\circ 24' = 55^\circ 13'$. Vi kan då beräkna distansen c mellan orterna med den sfäriska cosinus-satsen:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \Rightarrow c \approx 38,95^\circ \approx 2337'$$

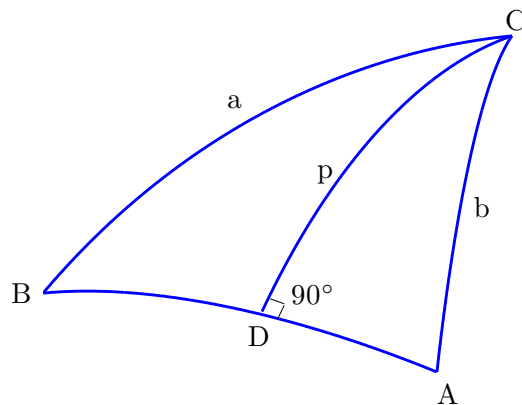
Distansen är alltså **2337 M**.

- (b) Här vill vi veta vinkeln A . Avseglingskursen är då $360^\circ - A$. Man kan använda sfäriska sinussatsen, men vi kan ta sfäriska cosinussatsen här också, eftersom den generellt ger ett entydigt svar.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \Rightarrow A \approx 68,3^\circ$$

Avseglingskursen är därmed (i hela grader) $360^\circ - 68^\circ = \mathbf{292^\circ}$.

- (c) Vi drar nu den storcirkelbåge från nordpolen till sidan c som skär den senare i rät vinkel. Där i punkten D är nämligen avståndet till nordpolen minst.

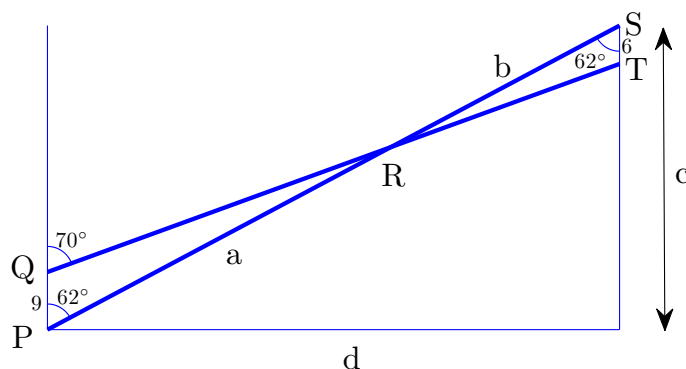


Sträckan p beräknas med sinussatsen:

$$\frac{\sin p}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin 90^\circ} \Rightarrow \sin p = \sin A \sin b \Rightarrow p \approx 42,49^\circ$$

Punkten D har den nordligaste latituden längs rutten, som är $90^\circ - p \approx 47,51^\circ \approx \mathbf{47^\circ 31'}$.

8. Figuren ger en överblick över situationen. Fartyg A startar kl 12.00 i punkten P och befinner sig 30 minuter senare i Q , fartyg B startar i S och når T kl 12.30. Eftersom A har farten 18 knop, är sträckan $PQ = 9$ M. B rör sig med $2/3$ av denna fart, så $ST = 6$ M. Triangelarna PQR och STR är likformiga (motsvarande vinklar är lika) med skalan 3:2.



Plan för lösningen: Sträckan d i figuren är det som söks i första frågan. Vi kan beräkna figurens a med sinussatsen, b är $2/3$ av a . Vi har då $a + b$ och kan projicera denna och få både c och d . För att besvara den andra frågan, behöver vi veta hur långt fartygen har gått då de är jämsides. Med deras farter, som förhåller sig som 3:2, måste då A ha rört sig $3/5$ av c . Med farten 18 knop beräknar vi då lätt gångtiden för denna sträcka. Till verket: Sinusatsen används på triangeln PQR , vinkeln vid R är ju 8° och vid Q är den 110° .

$$\frac{a}{\sin 110^\circ} = \frac{9}{\sin 8^\circ} \Rightarrow a \approx 60,77$$

Då blir

$$b = \frac{2}{3}a \approx 40,51 \quad \text{och} \quad a + b \approx 101,3$$

Vidare

$$d = (a + b) \sin 62^\circ \approx 89,4, \quad c = (a + b) \cos 62^\circ \approx 47,5$$

När fartygen är jämsides (och närmast varandra) har A rört sig $\frac{3}{5}c \approx 28,53$ M med farten 18 knop. Tiden för detta blir således $\approx \frac{28,53}{18} \approx 1,58$ h, vilket är ca 1 h 35 min. Vi har alltså svaren:
Fartygen är som närmast **89 M** från varandra och det inträffar **kl 13.35**.