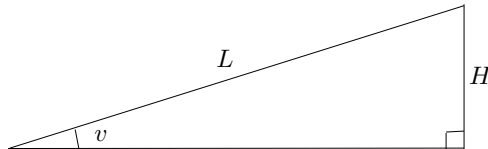


LNC022 2013-05-27 Lösningar

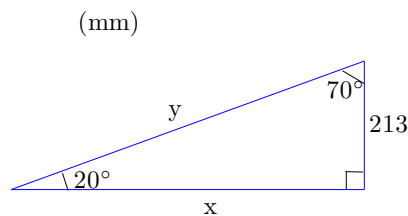
1. (a) På en vägs skylt står det att vägens lutning är 12 %. Om detta innebär att höjdskillnaden är 12 % av den körda vägsträckan, vilken är då vägens lutningsvinkel? (Rita figur.)
- (b) v är en vinkel i en triangel, $\sin v = 0,36$ och $\cos v$ är negativt. Beräkna v , både i grader och i radianer.
- (c) I en triangel med vinklarna 20° , 70° och 90° är den kortaste sidan 213 mm. Beräkna de övriga sidornas längder.

Lösning:

- (a) Informationen innebär (se figuren) att $\sin v = H/L = 0,12$, vilket ger vinkeln $v \approx 6,9^\circ$.



- (b) Räknaren ger $v_1 = \arcsin 0,36 \approx 21,1^\circ$, och vi vet att det finns en trubbig vinkel med samma sinus: $v_2 = 180^\circ - \arcsin 0,36 \approx 158,9^\circ$. Eftersom cosinus är positivt för den spetsiga vinkeln och negativt för den trubbiga, så är här $v \approx 158,9^\circ$. För att uttrycka den i radianer får vi multiplicera med $\frac{\pi}{180}$. Då är $v \approx 2,77$. Alltså: $v \approx 2,77 \approx 158,9^\circ$.
- (c) Situationen illustreras i figuren nedan, där de sökta sidorna markerats med x och y .



Vi har nu

$$\tan 20^\circ = \frac{213}{x}, \quad \sin 20^\circ = \frac{213}{y}$$

vilket ger

$$x = \frac{213}{\tan 20^\circ} \approx 585, \quad y = \frac{213}{\sin 20^\circ} \approx 623$$

Sidorna är cirka **585 mm** och **623 mm**.

2. Tre vektorer är givna med koordinater i en ON-bas som $\mathbf{u} = (2, -6, 3)$, $\mathbf{v} = (3, 4, -2)$ och $\mathbf{w} = (1, -1, 3)$.
- Beräkna storleken av vektorn $\mathbf{u}$.
 - Ange vektorn $\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ i koordinatform.
 - beräkna skalärprodukten $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$.
 - Beräkna vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.
 - Ange en vektor (ej nollvektorn) som är vinkelrät mot $\mathbf{w}$ (det finns många).

Lösning:

- $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$
- $\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w} = (2, -6, 3) + (3, 4, -2) - 2(1, -1, 3) = (2 + 3 - 2, -6 + 4 - (-2), 3 - 2 - 6) = (3, 0, -5)$
- $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = -24$
- Vi använder skalärprodukten från (c) och längderna, där vi redan från (a) har $|\mathbf{u}| = 7$, och vi får på samma sätt $|\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$. Om vinkeln kallas α :

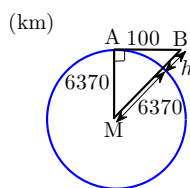
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{-24}{7\sqrt{29}} \Rightarrow \alpha \approx 130^\circ$$

- Det gäller att hitta en vektor (x, y, z) vars skalärprodukt med $\mathbf{w}$ är noll, dvs $x - y + 3z = 0$. Det finns många sådana, t ex $(1, 1, 0)$ eller $(0, 3, 1)$ eller $(4, 1, -1)$.

3. Ett flygplan syns från en punkt på havsytan precis i horisontlinjen. Om vi bortser från atmosfärisk ljusbrytning, på vilken höjd ska planet flyga för att synas på 100 km avstånd? Jordens radie antas vara 6370 km.

Lösning:

Låt A vara observatörens plats, B flygplanets läge och M jordens medelpunkt. Vi vill beräkna flyghöjden h . Figuren visa situationen med kraftigt överdrivna proportioner.



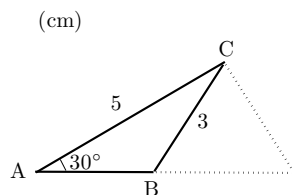
Pythagoras sats ger oss hypotenusan $x = 6370 + h$ (allt i km):

$$x^2 = 6370^2 + 100^2 \Rightarrow x \approx 6370,785 \text{ km, och } h = x - 6370 \approx 0,785 \text{ km}$$

Flyghöjden bör alltså vara minst **785 m**.

4. I en triangel är en vinkel 30° och dess motstående sida är 3 cm. Triangelns längsta sida är 5 cm. Beräkna triangelns återstående sida och vinklar.

Lösning:



Sinussatsen ger oss vinkeln B :

$$\frac{\sin B}{5} = \frac{\sin 30^\circ}{3} \Rightarrow \sin B = \frac{5}{6} \Rightarrow B \approx 56,44^\circ \text{ eller } B \approx 180^\circ - 56,44^\circ = 123,56^\circ$$

Vinkelsumman ger vinkeln $C = 180^\circ - 30^\circ - B$. Eftersom sidan med längd 5 cm ska vara längst, så måste vinkeln B vara störst. Detta inträffar bara i fallet då $B \approx 123,56^\circ$. Då blir $C \approx 26,44^\circ$, och sidan c kan beräknas med cosinussatsen:

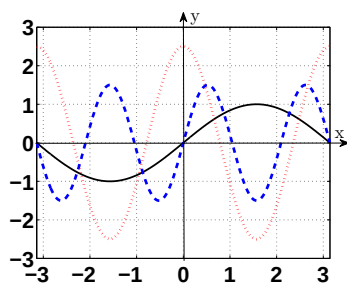
$$c^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos C \Rightarrow c \approx 2,67$$

Det alternativa fallet som dök upp i lösningen svarar mot de streckade linjerna i figuren.

Svar: Sidan är cirka 2,7 cm, vinkeln mot denna är $\approx 26^\circ$ och den tredje vinkeln $\approx 124^\circ$.

5. Figuren visar tre kurvor, av vilka en är $y = \sin x$. De två övriga är $y = A \sin(px)$ och $y = B \cos(qx)$. Bestäm konstanterna A , p , B och q .

Lösning:



Kurvan $y = \sin x$ pendlar mellan värden ± 1 (amplituden är 1), vilket visar vilken av kurvorna detta är: svart och heldragen i figuren ovan. En kurva av typen $y = B \cos(qx)$ går ej genom origo, eftersom $\cos 0 = 1$, så den kurvan kan vi också urskilja: röd och prickad. Den tredje kurvan är därmed $y = A \sin(px)$, blå och streckad. Amplituderna (maxvärdena) avläses till $A = 1,5$, $B = 2,5$. För den röda kurvan är två perioder lika med en period av $y = \sin x$, dvs perioden är $T = \pi$. För den blå kurvan går det precis tre perioder på en period av $y = \sin x$, så perioden är $2\pi/3$. Eftersom produkten av perioden och vinkelfrekvensen är $T\omega = 2\pi$, så är därmed respektive vinkelfrekvens $p = 3$ och $q = 2$ (de svänger ju två ggr respektive tre ggr så fort som $y = \sin x$).

Svar: $A = 1,5$, $p = 3$, $B = 2,5$, $q = 2$.

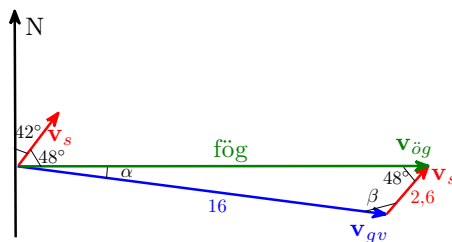
6. Ett fartyg rör sig i ett område där strömmen har farten 2,6 knop och kursen 42° .

Om farten genom vattnet är 16 knop,

(a) vilken kurs (kgv) ska man hålla för att kursen över grund (kög) ska bli 90° ?

(b) vilken blir farten över grund?

Lösning:



Efter att ha ritat strömtriangeln, kan vi se att en av vinklarna i denna är 48° , och vi kallar de övriga α och β .

- (a) Eftersom $\text{kgv} = \text{kög} + \alpha = 90^\circ + \alpha$, så beräknar vi först vinkeln α med sinussatsen. Vi inser att detta är en spetsig vinkel (står ej mot längsta sidan):

$$\frac{\sin \alpha}{2,6} = \frac{\sin 48^\circ}{16} \Rightarrow \alpha \approx 6,9360^\circ$$

Därmed ska kursen genom vattnet vara cirka 97° .

- (b) Vi får nu den återstående vinkeln via vinkelsumman: $\beta = 180^\circ - 48^\circ - \alpha \approx 125,0640^\circ$. Då ger cosinussatsen

$$fög^2 = 16^2 + 2,6^2 - 2 \cdot 16 \cdot 2,6 \cdot \cos \beta \Rightarrow fög \approx 17,6226$$

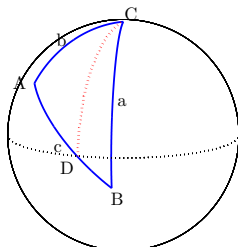
Farten över grund blir alltså approximativt **18 knop**.

7. Man vill segla på storcirkeln från Bermuda ($32^{\circ}23'N$, $64^{\circ}41'W$) till St Helena ($15^{\circ}57'S$, $5^{\circ}42'W$).

- Beräkna distansen.
- Beräkna avseglingkursen.
- Vilken kurs håller man vid passagen av ekvatorn?

Lösning:

I figuren markeras Bermuda med A , St Helena med B och nordpolen med C . Punkten D är den punkt där ruten korsar ekvatorn. a , b , c och CD är förstås storcirkelbågarna mellan respektive punkter. a , b och CD är också meridianbågar. I (a) beräknar vi sidan c (omvandlad till distans), i (b) beräknar vi vinkeln A och i (c) är det vinkeln CDB som söks.



- (a) Storcirkelbågen c beräknas med sfäriska cosinussatsen, med $a = 90^{\circ} + 15^{\circ}57'$, $b = 90^{\circ} - 32^{\circ}23'N$, $C = 64^{\circ}41' - 5^{\circ}42'$:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \Rightarrow c \approx 74,2630^{\circ}$$

Detta innebär att distansen för hela seglatsen är $c \cdot 60 \approx 4456M$.

- (b) Avseglingskursen är vinkeln A i triangeln, vilken beräknas med cosinussatsen:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin a \sin c} \Rightarrow A \approx 121,1120^{\circ}$$

- (c) Att punkten D ligger på ekvatorn innebär att storcirkelbågen $CD = 90^{\circ}$. Genom att använda sfäriska sinussatsen på triangeln ACD kan man bestämma vinkeln $\alpha = ADC$, varefter den sökta kursen är vinkeln CDB som är $180^{\circ} - \alpha$.

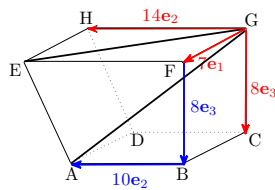
$$\frac{\sin \alpha}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin 90^{\circ}} \Rightarrow \sin \alpha = \sin b \sin A \Rightarrow \alpha \approx 46,3006^{\circ}$$

och vi har den sökta kursen $180^{\circ} - \alpha = 133,6994^{\circ}$.

Om man vill, kan man också beräkna longitudinen vid ekvatorspassagen D . Vi har nämligen alla vinklarna i den sydliga triangel som avskärs av ekvatorn, och vi har längden av meridianen från ekvatorn till B . Med sfäriska sinussatsen får man då ekvatorsbågen i denna triangel till $17,4024^{\circ}$. Longituden för D är då $17,4024^{\circ}$ västligare än longituden för B , dvs $23,1024^{\circ}W = 23^{\circ}6'W$.

Svar: (a) **4456 M**, (b) **121°**, (c) **134°**.

8. Figuren visar ett prisma, i vilket alla vinklar i hörnen B, C, F och G är räta.
 $AB = CD = 10$ cm, $BC = FG = 7$ cm, $BF = CG = 8$ cm, $EF = GH = 14$ cm.
 Beräkna vinkeln vid hörnet G i triangeln AGE.



Lösningsvariant I:

Vi kan införa en ON-bas med basvektorer (av längd 1), riktade så här: e_1 riktad från G mot F, e_2 riktad från G mot H, e_3 riktad från G mot C. Tre av sidorna i prisma representeras då av vektorerna $\vec{GF} = 7e_1$, $\vec{GH} = 14e_2$, $\vec{GC} = 8e_3$ (visas i figuren), en annan sida är $\vec{BA} = 10e_2$. Med hjälp av dessa får vi $\vec{GA} = 7e_1 + 10e_2 + 8e_3 = (7, 10, 8)$ och $\vec{GE} = 7e_1 + 14e_2 = (7, 14, 0)$. Den sökta vinkeln α kan nu beräknas med skalärprodukt (som i uppgift 2(d)):

$$\cos \alpha = \frac{\vec{GA} \cdot \vec{GE}}{|\vec{GA}| |\vec{GE}|} = \frac{7 \cdot 7 + 14 \cdot 14 + 10 \cdot 0}{\sqrt{7^2 + 10^2 + 8^2} \sqrt{7^2 + 14^2 + 0^2}} = \frac{189}{\sqrt{213} \sqrt{245}} \Rightarrow \alpha \approx 34,2^\circ$$

Lösningsvariant II:

Man kan beräkna sidorna i triangeln AGE i ett eller flera steg med Pythagoras sats. Man får då (detaljer lämnas åt läsaren) $AG = \sqrt{213}$, $EG = \sqrt{245}$, $AE = \sqrt{80}$. Sedan kan man beräkna vinkeln α med cosinussatsen:

$$AE^2 = AG^2 + EG^2 - 2 \cdot AG \cdot EG \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AG^2 + EG^2 - AE^2}{2 \cdot AG \cdot EG} = \frac{189}{\sqrt{213} \sqrt{245}} \Rightarrow \alpha \approx 34,2^\circ$$