

LNC021 2012-08-20 Lösningar

1. (a) $\frac{(a^2b)^3(bc^2)^4}{(a^3b)^2(bc)^5} = \frac{a^6b^3b^4c^8}{a^6b^2b^5c^5} = \frac{b^7c^8}{b^7c^5} = c^3$
- (b) $(x+3)^2 - (x-3)^2 = x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 6x + 9) = 12x$ (kvadreringsreglerna).
- (c) $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)^2} = \frac{x-3}{x+3}$ (konjugatregeln och första kvadreringsregeln).

2. (a)

$$\lg(14-x) - \lg(x-3) = 1$$

Log-lagen för division och $1 = \lg 10$ ger

$$\lg \frac{14-x}{x-3} = \lg 10$$

$$\frac{14-x}{x-3} = 10$$

$$14-x = 10(x-3)$$

$$14-x = 10x-30$$

$$44 = 11x$$

Alltså har vi svaret $x = 4$.

- (b)

$$6x^2 + x - 2 = 0$$

Dividera med 6:

$$x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$$

pq-formeln ger lösningarna:

$$x = -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{1}{3}} = -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{48}{144}} = -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{49}{144}} = -\frac{1}{12} \pm \frac{7}{12}$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

- (c) Perioden för funktionen $f(t) = 15 \sin(5t)$ är $\frac{2\pi}{5} \approx 1,26$.

3. (a) Vi beräknar linjens riktningskoefficient ur de två punkternas koordinater enligt $k = \frac{10-1}{1-(-2)} = 3$. Då vet vi att linjen har en ekvation av typen $y = 3x + m$. Sätt in koordinaterna från den ena punkten: $10 = 3 \cdot 1 + m$ och få ut $m = 7$. Linjens ekvation: $y = 3x + 7$.

- (b) Cirkeln har ekvationen $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, där (a,b) är medelpunkten och r är radien. Vi har alltså ekvationen $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$.

- (c) Avståndet från origo till cirkelns medelpunkt är $d = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$. Eftersom radien är 2, måste det minsta avståndet från origo bli $\sqrt{10} - 2 \approx 1,16$.

4. Resultanten av $\mathbf{F}_1$ och $\mathbf{F}_2$ blir i koordinatform $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (3,3) + (2,-1) = (5,2)$. För att resultanten av alla tre ska bli nollvektorn, måste $\mathbf{F}_3 = (-5,-2)$. Krafternas storlekar blir nu $|\mathbf{F}_1| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} \approx 4,24$, $|\mathbf{F}_2| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \approx 2,24$, $|\mathbf{F}_3| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29} \approx 5,39$.

Vinkeln α mellan $\mathbf{F}_2$ och $\mathbf{F}_3$ kan beräknas med hjälp av skalärprodukten:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_2 \bullet \mathbf{F}_3 = |\mathbf{F}_2||\mathbf{F}_3| \cos \alpha = \sqrt{5}\sqrt{29} \cos \alpha \\ \mathbf{F}_2 \bullet \mathbf{F}_3 = (2,-1) \bullet (-5,-2) = 2 \cdot (-5) + (-1) \cdot (-2) = -8 \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-8}{\sqrt{5}\sqrt{29}} \Rightarrow \alpha \approx 131,6^\circ$$

Svar: Krafternas storlekar är **4,2 N**, **2,2 N**, **5,4 N**, den sökta vinkeln är **132°**.

5. Eftersom $A = 91^\circ$ måste vara den största vinkeln, står den mot längsta sidan $a = 19$ cm. Vinkeln B står mot sidan $b = 12$ cm. Med sinussatsen kan vi beräkna vinkeln B , som måste vara spetsig.

$$\frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin a} \iff \frac{\sin B}{12} = \frac{\sin 91^\circ}{19} \iff \sin B = \frac{12 \sin 91^\circ}{19} \Rightarrow B \approx 39,16^\circ$$

Ur vinkelsumman får vi den återstående vinkeln $C = 180^\circ - A - B \approx 49,84^\circ$, varefter triangelarean beräknas med areasatsen: $T = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot 12 \sin C \approx 87 \text{ cm}^2$.

6. Sätt $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$.

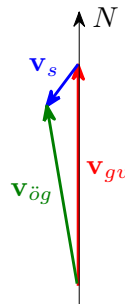
- (a) Med sekantmetoden, $h = 1$:

$$\int_0^4 f(x) dx \approx \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \frac{1}{2}f(4) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2 + \sqrt{7} + \sqrt{12} + \frac{1}{2}\sqrt{19} \approx 11,155.$$

- (b) Med Simpsons formel, $h = 1$:

$$\int_0^4 f(x) dx \approx \frac{1}{3} \left(f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4) \right) = \frac{1}{3} \left(\sqrt{3} + 8 + 2\sqrt{7} + 4\sqrt{12} + \sqrt{19} \right) \approx 11,080.$$

7. (a) Situationen visas i figuren. $fgv = |v_{gv}| = 15$, $fög = |v_{ög}| = 12$, vinkeln mellan de båda fartygskurserna är 10° (längst ner i strömtriangeln).



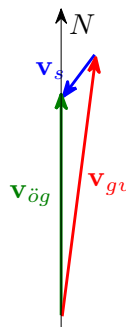
Strömmens fart $fs = |v_s|$ beräknas med cosinussatsen. Dess riktning är $180^\circ + \alpha$, där α är vinkeln i strömtriangelns topp. Vinkeln v får man med sinussatsen sedan fs beräknats.

$$fs^2 = 15^2 + 12^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12 \cos 10^\circ \Rightarrow fs \approx 3,80$$

$$\frac{\sin \alpha}{12} = \frac{10^\circ}{fs} \Rightarrow \alpha \approx 33,2^\circ$$

Så vi får strömmens fart till **3,8** knop och dess kurs till **ks = $180^\circ + \alpha \approx 213^\circ$** .

- (b) Den nya situationen kräver en ny figur. Nu är $fög = |v_{ög}| = 15$, $fs = |v_s| \approx 3,8$, vinkeln i övre vänstra hörnet av strömtriangeln (vid pilspetsarna som möts) är $\beta = 180^\circ - \alpha \approx 146,78^\circ$, där α är vinkeln från (a).



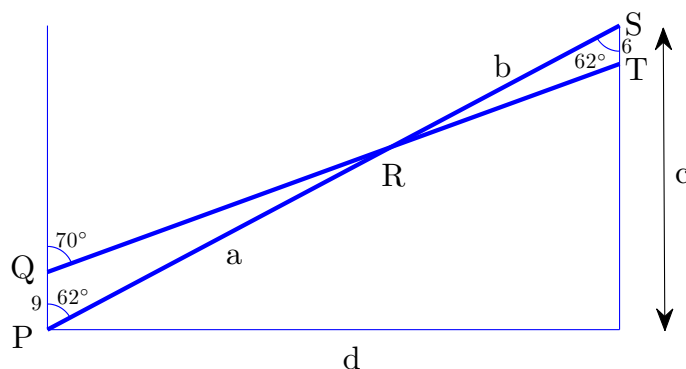
Denna gången får vi först fgv med cosinussatsen, sedan vinkeln γ mellan fartygskurserna (som är lika med kgv) med sinussatsen:

$$fgv^2 = 15^2 + fs^2 - 2 \cdot 15 \cdot fs \cdot \cos \beta \Rightarrow fgv \approx 18,30$$

$$\frac{\sin \gamma}{fs} = \frac{\sin \beta}{fgv} \Rightarrow \gamma \approx 6,54^\circ$$

varmed **fgv ≈ 18 knop, kgv $\approx 7^\circ$** .

8. Figuren ger en överblick över situationen. Fartyg A startar kl 12.00 i punkten P och befinner sig 30 minuter senare i Q , fartyg B startar i S och når T kl 12.30. Eftersom A har farten 18 knop, är sträckan $PQ = 9$ M. B rör sig med $2/3$ av denna fart, så $ST = 6$ M. Triangeln PQR och STR är likformiga (motsvarande vinklar är lika) med skalan 3:2.



Plan för lösningen: Sträckan d i figuren är det som söks i första frågan. Vi kan beräkna figurens a med sinussatsen, b är $2/3$ av a . Vi har då $a + b$ och kan projicera denna och få både c och d . För att besvara den andra frågan, behöver vi veta hur långt fartygen har gått då de är jämsides. Med deras farter, som förhåller sig som 3:2, måste då A ha rört sig $3/5$ av c . Med farten 18 knop beräknar vi då lätt gångtiden för denna sträcka. Till verket: Sinusatsen används på triangeln PQR , vinkeln vid R är ju 8° och vid Q är den 110° .

$$\frac{a}{\sin 110^\circ} = \frac{9}{\sin 8^\circ} \Rightarrow a \approx 60,77$$

Då blir

$$b = \frac{2}{3}a \approx 40,51 \quad \text{och} \quad a + b \approx 101,3$$

Vidare

$$d = (a + b) \sin 62^\circ \approx 89,4, \quad c = (a + b) \cos 62^\circ \approx 47,5$$

När fartygen är jämsides (och närmast varandra) har A rört sig $\frac{3}{5}c \approx 28,53$ M med farten 18 knop. Tiden för detta blir således $\approx \frac{28,53}{18} \approx 1,58$ h, vilket är ca 1 h 35 min. Vi har alltså svaren: Fartygen är som närmast **89 M** från varandra och det inträffar **kl 13.35**.