

Kortfattade lösningar till tenta för LNC022, 2014-06-02:

1. (a) Kateterna blir $10 \cos 35^\circ \approx 8,2 \text{ cm}$ och $10 \sin 35^\circ \approx 5,7 \text{ cm}$.
(b) Likformigheten mellan trianglarna innebär att

$$\frac{x}{3} = \frac{5}{6} \text{ och } \frac{y}{5} = \frac{5}{6}$$

om minsta sidan är x cm och mellersta sidan är y cm i den mindre triangeln. Härav får vi $x = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ cm}$ och $y = \frac{25}{6} \approx 4,17 \text{ cm}$.

- (c) Amplituden A är maxvärdet av spänningen och $\omega T = 2\pi$ där $T = \frac{1}{50}$ s är perioden. Alltså: $A = 325$, $\omega = 100\pi \approx 314$

2. (a) $|a| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{30} \approx 5,5$ och $b = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11} \approx 3,3$.
(b) Använd skalärprodukten:

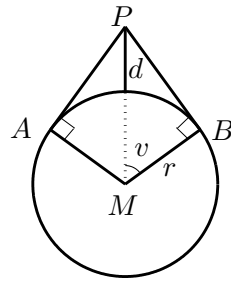
$$a \bullet b = |a||b| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{a \bullet b}{|a||b|} = \frac{1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 5 \cdot 1}{\sqrt{30}\sqrt{11}} \Rightarrow \alpha \approx 70,7^\circ$$

- (c) Vektorer är vinkelräta om och endast om deras skalär produkt är noll. Vi testar:

$$c \bullet a = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + x \cdot 5 = 5 + 5x, \quad c \bullet b = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + x \cdot 1 = 1 + x$$

Vi ser att båda blir noll om $x = -1$, alltså $c = (1, -2, -1)$.

3. I figuren är M jordens medelpunkt.



(a) Triangeln BMP är rätvinklig. Pythagoras sats ger:

$$MB^2 + BP^2 = MP^2 \iff r^2 + BP^2 = (d + r)^2 \iff 10^2 + BP^2 = 17^2 \Rightarrow$$

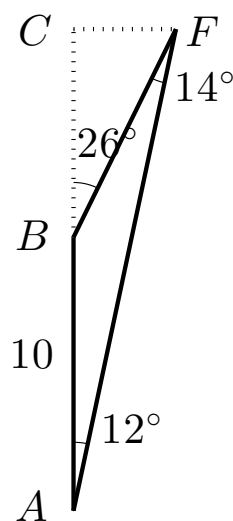
$$BP = \sqrt{17^2 - 10^2} = \sqrt{189} \approx 13,7 \text{ cm}$$

(b)

$$\cos v = \frac{r}{d + r} \Rightarrow v = \arccos \frac{10}{17} \approx 54,0^\circ$$

(c) Bågen upptar vinkeln $2v$, vilket innebär att dess längd är $\frac{2v}{360} \approx 30 \%$ (om v anges i grader) av omkretsen.

4. Figuren visar läget A kl 8.00, läget B kl 9.00 och läget C då fartyget är närmast fyren. Med 10 knops fart vet vi att $AB = 10$ M. Vi ser snart varför vi får vinkeln som i figuren till 14° .



Sinussatsen ger:

$$\frac{BF}{\sin 12^\circ} = \frac{10}{\sin 14^\circ} \Rightarrow BF = \frac{10 \sin 12^\circ}{\sin 14^\circ} \approx 8,594$$

I den rätvinkliga triangeln BCF får vi $BC = BF \cos 26^\circ \approx 7,72$ och $CF = BF \sin 26^\circ \approx 3,77$. Detta betyder att minsta avståndet till fyren blir **ca 3,8 M** och att denna punkt nås 0,772 timmar efter kl 9, dvs kl **9.46**.

5. Vi sätter $A = 28^\circ$, $a = 5$, $b = 8$. Sinussatsen ger nu

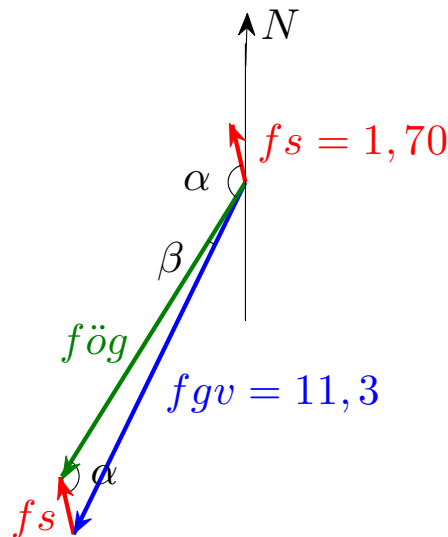
$$\frac{\sin B}{8} = \frac{\sin 28}{5} \Rightarrow \sin B = \frac{8 \sin 28}{5} \Rightarrow B \approx 48,69^\circ \text{ eller } B \approx 180^\circ - 48,69^\circ = 131,31^\circ$$

Med det första alternativet blir vinkeln C triangelns största ($103,31^\circ$), vilket motsäger att den motstående sidan c är den minsta. Alltså har vi $B \approx 131,31^\circ$. Då är $C = 180^\circ - A - B \approx 20,69^\circ$. Med sinussatsen får vi slutligen sidan c :

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{5}{\sin 28} \Rightarrow c \approx 3,76$$

Sammanfattningsvis: **$B \approx 131^\circ$, $C \approx 21^\circ$, $c \approx 3,8$.**

6. Situationen illustreras av figuren:



(a) Vi konstaterar att $\alpha = \text{ks} - \text{kög} = 347^\circ - 212^\circ = 135^\circ$, och att $\text{kgv} = \text{kög} - \beta = 212^\circ - \beta$. Sinussatsen ger:

$$\frac{\sin \beta}{1,70} = \frac{\sin 135^\circ}{11,3} \Rightarrow \sin \beta = \frac{1,70 \sin 135^\circ}{11,3} \Rightarrow \beta \approx 6,1066^\circ$$

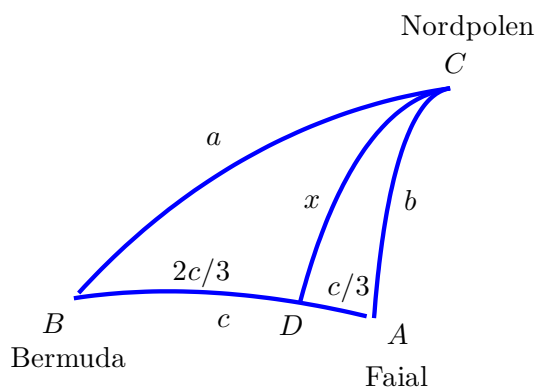
Kursen genom vatten är $\text{kgv} = 212^\circ - \beta \approx \mathbf{206^\circ}$.

(b) Sinussatsen ger, med tredje vinkeln $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 38,8934^\circ$:

$$\frac{f_{og}}{\sin \gamma} = \frac{1,70}{\sin \beta} \Rightarrow f_{og} = \frac{1,70 \sin \gamma}{\sin \beta} \approx 10,0$$

Farten över grund är **10,0 knop**.

7. I figuren är $a = 90^\circ - \text{Lat}(B) = 57^\circ 40'$ och $b = 90^\circ - \text{Lat}(A) = 51^\circ 31'$. Vinkeln C är longituddifferensen: $C = 37^\circ 32'$.



- (a) Först ska vi beräkna sidan c och därmed avståndet längs storcirkeln mellan A och B . Detta får vi med cosinussatsen:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C \Rightarrow c \approx 30,9818^\circ \approx 1859'$$

Avståndet är därmed **1859 M**.

- (b) För att beräkna kursen vid B , konstaterar vi att den är $B + 180^\circ$. Vi beräknar därför B med cosinussatsen:

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} B \approx 67,88^\circ$$

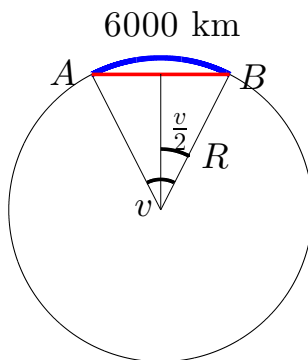
Kursen är alltså $B + 180^\circ \approx \mathbf{248^\circ}$.

- (c) Latituden för den sökta positionen är $90^\circ - x$ (x som i figuren). Cosinussatsen ger

$$\cos x = \cos a \cdot \cos(2c/3) + \sin a \cdot \sin(2c/3) \cdot \cos B \Rightarrow x \approx 52,2171^\circ$$

Då är latituden för D $90^\circ - x \approx 37,7829^\circ \approx \mathbf{37^\circ 47'}$.

8. (a) Jordens omkrets är $P = 360 \cdot 60 \cdot 1,852$ km, radien är $R = \frac{P}{2\pi} \approx 6366,7$ km.



I figuren är *cirkelbågen* AB lika med 6000 km. Centrumvinkeln är $v = \frac{6000}{60 \cdot 1,852} \approx 54,00^\circ$ (dividera med 1,852 för att få nautiska mil = minuter, dividera med 60 för att få grader). Nu kan vi beräkna *sträckan* AB , som är $2R \sin \frac{v}{2} \approx \mathbf{5780 \text{ km}}$.

- (b) Då orterna ligger på samma latitud $N57^\circ$, kan vi beräkna longituddifferensen. Betrakta den sfäriska triangeln ABC , där A och B är de två orterna och C är nordpolen. Sidorna a och b är då båda $90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$, sidan $c = v \approx 54,00^\circ$ (enligt (a)). Vi kan då beräkna longituddifferensen C med sfäriska cosinussatsen:

$$\cos C = \frac{\cos c - (\cos 33^\circ)^2}{(\sin 33^\circ)^2}$$

Vi får $C \approx 112,92^\circ$. Latitudcirkelbågens längd är då $\frac{C}{360}$ av hela dess omkrets, som i sin tur är storcirkelns omkrets gånger $\cos 57^\circ$. Vi får därmed denna längd till $\frac{C}{360} 2\pi R \cos 57^\circ \approx \mathbf{6834 \text{ km}}$.