

Kortfattade lösningar till tenta för LNC022, 2015-04-15:

- Pythagoras sats ger hypotenusan: $c^2 = 16^2 + 30^2 = 1156$, $c = \sqrt{1156} = \mathbf{34 \text{ cm}}$.
Vinkeln v mellan sidorna 16 och 34 ges av $\cos v = \frac{16}{34}$ eller $\tan v = \frac{30}{16}$, $v \approx \mathbf{61,9^\circ}$.
 - Trigonometriska ettan ger $\cos^2 v = 1 - \sin^2 v = 1 - 0,12^2 \Rightarrow \cos v \approx \pm 0,99$.
Men v skulle vara mellan 90° och 180° , så vi tar $\cos v \approx -0,99$.
 - För $A \sin(\omega t)$ är amplituden A och perioden $\frac{2\pi}{\omega}$.
Här ger detta amplituden $\mathbf{15}$ och perioden $\frac{2\pi}{5} \approx \mathbf{1,26}$.

- Resultanten av $\mathbf{F}_1$ och $\mathbf{F}_2$ blir i koordinatform $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (15, 15) + (10, -5) = (25, 10)$. För att resultanten av alla tre ska bli nollvektorn, måste $\mathbf{F}_3 = (-25, -10)$. Krafternas storlekar blir nu

$$|\mathbf{F}_1| = |15(1, 1)| = 15\sqrt{1^2 + 1^2} = 15\sqrt{2} \approx 21,2$$

$$|\mathbf{F}_2| = 5|(2, -1)| = 5\sqrt{2^2 + (-1)^2} = 5\sqrt{5} \approx 11,2$$

$$|\mathbf{F}_3| = |5(-5, -2)| = 5\sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = 5\sqrt{29} \approx 26,9$$

Vinkeln α mellan $\mathbf{F}_1$ och $\mathbf{F}_2$ kan beräknas med hjälp av skalärprodukten:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1 \bullet \mathbf{F}_2 = |\mathbf{F}_1||\mathbf{F}_2| \cos \alpha = 15\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{5} \cos \alpha \\ \mathbf{F}_1 \bullet \mathbf{F}_2 = (15, 15) \bullet (10, -5) = 15 \cdot 10 + 15 \cdot (-5) = 75 \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha \approx 71,6^\circ$$

Svar: Krafternas storlekar är **21,2 N**, **11,2 N**, **26,9 N**, den sökta vinkeln är **72°**.

- Om den tredje sidan är c , så har vi med cosinussatsen

$$c = \sqrt{6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cos(30^\circ)} \approx 3,5$$

Vi beräknar den största vinkeln, som vi kallar A och som står mot största sidan 7, med cosinussatsen (för att slippa osäkerheten som sinussatsen ger):

$$7^2 = c^2 + 6^2 - 2 \cdot 6c \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{c^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 6c} \Rightarrow A \approx 91,0^\circ$$

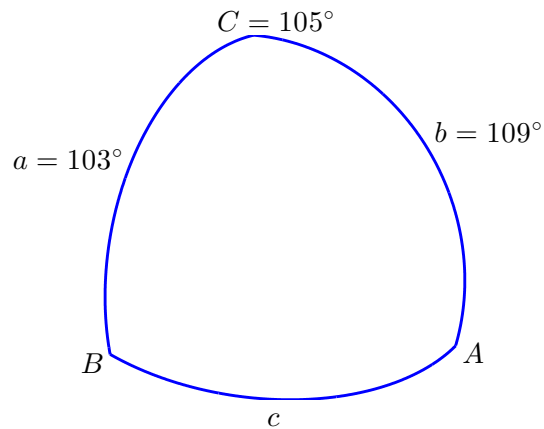
Vi kan använda cosinussatsen igen, men nu är sinussatsen "ofarlig" eftersom återstående vinklar måste vara spetsiga. Sinussatsen:

$$\frac{\sin B}{6} = \frac{\sin 30}{c} \Rightarrow B \approx 91,0^\circ$$

Med hjälp av vinkelsumman får vi den återstående vinkeln till $C = 180^\circ - 30^\circ - B \approx 59,0^\circ$.

Återstående sida är 3,5 cm, vinklarna 91,0° och 59,0°.

4. Vi inför beteckningar enligt figuren:



Eftersom sfäriska cosinussatsen kan användas hela vägen, och är "säkrare" för vinklar, använder vi den:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \Rightarrow c \approx 99,5^\circ$$

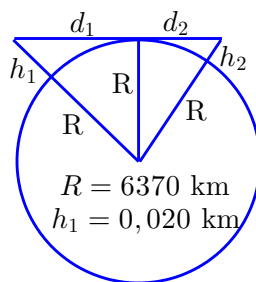
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \Rightarrow A \approx 107,4^\circ$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} \Rightarrow B \approx 112,2^\circ$$

Om man vill använda sfäriska sinussatsen för vinklarna A och B , ska man tänka på att c är minsta sidan. Därför är också $C = 105^\circ$ den minsta vinkeln och för A och B måste man alltså välja det trubbiga alternativet när man löser sinusekvationen.

Återstående sida är $99,5^\circ$, vinklarna $107,4^\circ$ och $112,2^\circ$.

5. I figuren är $h_1 = 20\text{m}$, h_2 är mottagarens höjd. Höjder och avstånd är starkt överdrivna i figuren.



Vi vill att $d_1 + d_2$ ska vara 30 km. Först beräknar vi d_1 och därmed d_2 med Pythagoras sats, därefter kan vi få $R + h_2$, också ur Pythagoras sats.

Pythagoras:

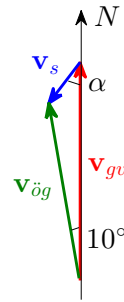
$$R^2 + d_1^2 = (R + h_1)^2 \Rightarrow d_1^2 = (R + h_1)^2 - R^2 = 6370,020^2 - 6370^2$$

Detta ger oss $d_1 \approx 15,96$ km, och $d_2 = 30 - d_1 \approx 14,04$ km. Pythagoras igen:

$$(R + h_2)^2 = R^2 + h_2^2 \quad \Rightarrow \quad R + h_2 \approx 6370,015$$

vilket visar att $h_2 \approx 0,015 \text{ km} = 15 \text{ m}$. Mottagaren behöver vara **15 m** upp.

6. (a) Situationen visas i figuren. $f_{gv} = |v_{gv}| = 20$, $f_{ög} = |v_{ög}| = 16$, vinkeln mellan de båda fartygskurserna är 10° .



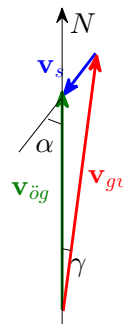
Strömmens fart $f_s = |v_s|$ beräknas med cosinussatsen. Dess riktning är $180^\circ + \alpha$, där α är vinkeln i strömtriangelns topp. Vinkeln α får man med sinussatsen sedan f_s beräknats.

$$f_s^2 = 20^2 + 16^2 - 2 \cdot 20 \cdot 16 \cos 10^\circ \Rightarrow f_s \approx 5,07$$

$$\frac{\sin \alpha}{16} = \frac{10^\circ}{f_s} \Rightarrow \alpha \approx 33,2^\circ$$

Så vi får strömmens fart till **5,1 knop** och dess kurs till **$\mathbf{k_s} = 180^\circ + \alpha \approx 213^\circ$** .

- (b) Den nya situationen kräver en ny figur. Nu är $f_{ög} = |v_{ög}| = 15$, $f_s = |v_s| \approx 5,07$, vinkeln i övre vänstra hörnet av strömtriangeln (vid pilspetsarna som möts) är $\beta = 180^\circ - \alpha \approx 146,78^\circ$, där α är vinkeln från (a).



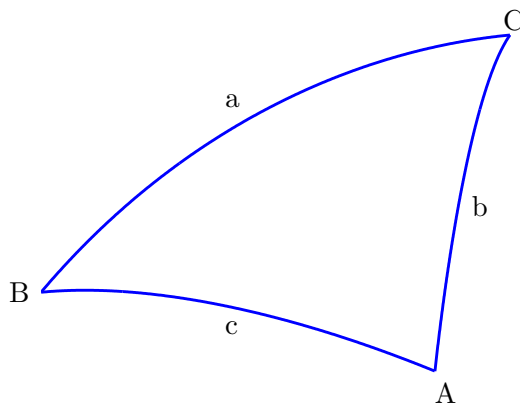
Denna gången får vi först f_{gv} med cosinussatsen, sedan vinkeln γ mellan fartygskurserna (som är lika med k_{gv}) med sinussatsen:

$$f_{gv}^2 = 15^2 + f_s^2 - 2 \cdot 15 \cdot f_s \cdot \cos \beta \Rightarrow f_{gv} \approx 19,44$$

$$\frac{\sin \gamma}{f_s} = \frac{\sin \beta}{f_{gv}} \Rightarrow \gamma \approx 8,2^\circ$$

varmed **$f_{gv} \approx 19$ knop**, **$k_{gv} \approx 8^\circ$** .

7. (a) Vi betraktar en sfärisk triangel med hörn A i avseglingssorten i Spanien, B i ankomstorten i Kanada och C i nordpolen.



Vi känner då sidorna $a = 90^\circ - 44^\circ 40' = 45^\circ 20'$, $b = 90^\circ - 43^\circ 22' = 46^\circ 38'$ samt vinkeln $C = 63^\circ 37' - 8^\circ 24' = 55^\circ 13'$. Vi kan då beräkna distansen c mellan orterna med den sfäriska cosinussatsen:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \Rightarrow c \approx 38,95^\circ \approx 2337'$$

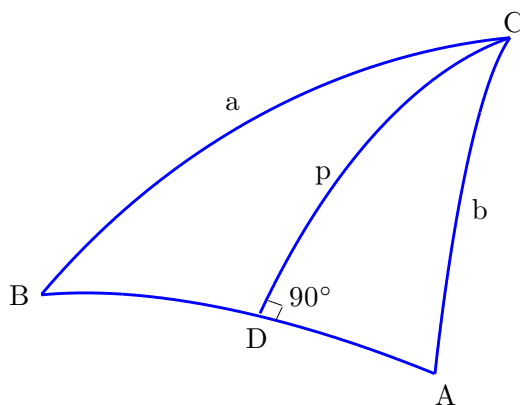
Distansen är alltså **2337 M**.

- (b) Här vill vi veta vinkeln A . Avseglingskursen är då $360^\circ - A$. Man kan använda sfäriska sinussatsen, men vi kan ta sfäriska cosinussatsen här också, eftersom den generellt ger ett entydigt svar.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \Rightarrow A \approx 68,3^\circ$$

Avseglingskursen är därmed (i hela grader) $360^\circ - 68^\circ = \mathbf{292^\circ}$.

- (c) Vi drar nu den storcirkelbåge från nordpolen till sidan c som skär den senare i rät vinkel. Där i punkten D är nämligen avståndet till nordpolen minst.

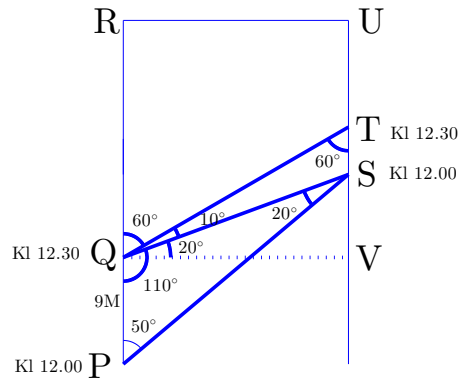


Sträckan p beräknas med sinussatsen:

$$\frac{\sin p}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin 90^\circ} \Rightarrow \sin p = \sin A \sin b \Rightarrow p \approx 42,49^\circ$$

Punkten D har den nordligaste latituden längs rutten, som är $90^\circ - p \approx 47,51^\circ \approx \mathbf{47^\circ 31'}$.

8. I figuren är punkterna P, Q, R lägena för fartyg A, och punkterna S, T, U lägena för fartyg B. Avståndet mellan R och U är det som söks i (a), klockslaget för R och U, då fartygen befinner sig jämsides, efterfrågas i (b).



Vi börjar med avståndet RU. Efter att ha rätt ut alla vinklar (se figuren) ser vi att $RU = QS \cos 20^\circ$ (streckade linjen QV är lika med RU). Nu är $PQ = 9$ M (fart 18 knop, tid 30 minuter), och vi får då ut QS med sinussatsen i triangeln PQS:

$$\frac{QS}{\sin 50^\circ} = \frac{PQ}{\sin 20^\circ} \Rightarrow QS = \frac{9 \sin 50^\circ}{\sin 20^\circ}, \quad RU = \frac{9 \sin 50^\circ \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 18,9$$

Minsta avståndet är alltså ca 18,9 M.

För att få ut tidpunkten då fartygen är jämsides, antag att tiden räknat från kl 12.30 är t (timmar). Då är $QR = 18t$. Om vi beräknar ST, så får vi B:s fart, och kan då uttrycka t ex. SV med hjälp av t . Därefter kan vi lösa ut t ur Pythagoras sats använd på triangeln QSV, vars övriga sidor vi nu har. Först får vi ST genom att använda sinussatsen på triangeln QST:

$$\frac{ST}{\sin 10^\circ} = \frac{QS}{\sin 60^\circ} \Rightarrow ST = \frac{QS \sin 10^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 4,04$$

Härav ser vi att fartyg B har tillryggalagt ca 4,04 M på 30 minuter. Fartyg B har alltså farten $v = 2 \cdot 4,04 \approx 8,08$ knop. Nu är $RQ = 18t$, $TU = vt$ och $SV = 18t - vt - ST$. Pythagoras sats ger nu i triangeln QSV:

$$((18-v)t - ST)^2 + RU^2 = QS^2 \Rightarrow (18-v)t - ST = \sqrt{QS^2 - RU^2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{QS^2 - RU^2} + ST}{18 - v}$$

Detta ger $t \approx 1,1029 \text{ h} \approx 66 \text{ min}$. Eftersom t räknats från kl 12.30, innebär det att det sökta klockslaget är **13.36**.