Lösning av dugga i MVE010 Inledande matematik I, 05 09 01

1. (a) Kvadratkomplettering ger att ekvationen är ekvivalent med

$$(x-1)^2+(y+2)^2=4+1+4=3^2.$$

Ekvationen beskriver alltså en cirkel med medelpunkt i $(1,-2)$ och radie 3.
Svar: Medelpunkt $(1,-2)$ och radie 3.

(b) Man har $f(x)=A\cdot a^x$, där $a>0$. Vidare är $2=f(0)=A$ samt $3=f(2)=2\cdot a^2$, så $a=(3/2)^{1/2}$. Detta ger $f(x)=2\cdot(3/2)^{x/2}$.
Svar: $f(x)=2\cdot(3/2)^{x/2}$.

(c) Man gissar lösningen $x=2$ och kan använda faktorsatsen:

$$0 \quad = \quad x^3-3x^2+5x-6=(x-2)(x^2-x+3)$$

De återstående lösningarna löser $0=x^2-x+3$ och är därför $1/2\pm\sqrt{1/4-3}=(1\pm i\sqrt{11})/2$.
Svar: $x=2$ och $x=(1\pm i\sqrt{11})/2$.

(d) Multiplikation med 2^{x+3} och ommöblering ger $2^{2x}-2^3 2^x-3\cdot 2^8=0$. Sätter vi $t=2^x$ (>0) får vi $0=t^2-2^3t-3\cdot 2^8$, som har lösningarna $t=2^2\pm\sqrt{2^4+3\cdot 2^8}=2^2(1\pm 7)$.
Eftersom $t=2^x$ är >0 får vi $2^x=2^2(1+7)=2^5$, som ger $x=5$.
Svar: $x=5$.

2. (a) Överflyttning och gemensamt bråkstreck ger den ekvivalenta olikheten

$$\begin{aligned} 0 \quad &< \quad \frac{4x\cdot 2\cdot(2x+3)-3x\cdot 2\cdot(2x-3)-(2x+3)(2x-3)}{2(2x-3)(2x+3)} = \\ &= \quad \frac{3(14x+3)}{2(2x-3)(2x+3)}=A \end{aligned}$$

En teckentabell ger nu

		$-3/2$		$-3/14$		$3/2$	
$14x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
A	$-$	$*$	$+$	0	$-$	$*$	$+$

Vi avläser nu
Svar: $-3/2<x<-3/14$ och $x>3/2$.

(b) Vi har

$$|x-3|=\begin{cases} x-3 & \text{om} \quad x\geq 3 \\ 3-x & \text{om} \quad x\leq 3 \end{cases}$$

samt

$$|2x+1|=\begin{cases} 2x+1 & \text{om} \quad x\geq -1/2 \\ -2x-1 & \text{om} \quad x\leq -1/2 \end{cases}$$

Vi delar upp problemet i tre fall.
1) Om $x\leq -1/2$ blir olikheten $3-x-2x-1>5$ eller $-3>3x$, dvs $x<-1$ $(\leq -1/2)$.
2) Om $-1/2\leq x\leq 3$ blir olikheten $3-x+2x+1>5$ eller $x>1$. Detta ger lösningarna $1<x\leq 3$.
3) Om $x\geq 3$ blir olikheten $x-3+2x+1>5$, eller $3x>7$ dvs $x>7/3$. Tillsammans med förutsättningen $x\geq 3$ ger detta lösningarna $x\geq 3$
Från 1), 2) och 3) får vi svaret
Svar: $x<-1$ och $x>1$.

3. (a) Efter första tabletten är kvantiteten 250 (mg).
Efter andra $250+0.04\cdot 250$.
Efter tredje $250+0.04(250+0.04\cdot 250)=250(1+0.04+0.04^2)$.
Efter fjärde $250+250\cdot 0.04(1+0.04+0.04^2))=250(1+0.04+0.04^2+0.04^3)$.

Vi ser att kvantiteten efter tionde tabletten är

$$\begin{aligned} 250(1+0.04+0.04^2+\cdots+0.04^9) &= 250\cdot\frac{1-0.04^{10}}{1-0.04} = \\ &= \frac{250}{0.96}(1-0.04^{10}). \end{aligned}$$

Svar: $\frac{250}{0.96}(1-0.04^{10})$ mg.

4. Strax efter det att tablett n tagits är kvantiteten som ovan

$$\begin{aligned} 250(1+0.04+0.04^2+\cdots+0.04^{n-1}) &= 250\cdot\frac{1-0.04^{n}}{1-0.04} = \\ &= \frac{250}{0.96}(1-0.04^{n}). \end{aligned}$$

När flera dagar gått är n så stort att 0.04^n i praktiken är 0. Detta ger (den ungefärliga) kvantiteten $250/0.96 \approx 260.3$ mg.

Svar: 260.3 mg.