Lösning av tentamen i MVE010 Inledande matematik I, 05 00 02

1. (a) Gränsvärdet är av typ $\infty - \infty$.. Förlängning med konjugerat uttryck ger

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1} &= \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} = \\ &= \frac{2x}{|x|(\sqrt{1+1/x+1/x^2}+\sqrt{1-1/x+1/x^2})} \to \frac{-2}{1+1}\end{aligned}$$

när $x \to -\infty$, eftersom $x/|x| = -1$, när $x < 0$.

Svar: -1.

(b) Gränsvärdet är av typ $0/0$. Förlängning med $1 + \cos x$ ger

$$\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \to 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

när $x \to 0$.

Svar: $1/2$.

2. Parameterframställning av linjen ger att $P = (1,2,3) + t(2,-1,-1) = (1+2t, 2-t, 3-t)$. Sätt $Q = (2,-1,0)$. Triangeln har då minst area när parallellogramen som spänns av $\vec{OP} = (1+2t, 2-t, 3-t)$ och $\vec{OQ} = (2,-1,0)$ har minst area. Denna areas kvadrat är $f(t) = |\vec{OP} \times \vec{OQ}|^2$. Eftersom

$$\vec{OP} \times \vec{OQ} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1+2t* & 2-t & 3-t \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right\} = (3-t, 2(3-t), -5)$$

är $f(t) = 5(3-t)^2 + 25$, som är minst när $t = 3$. I beskrivningen av P ska vi alltså välja $t = 3$, så

Svar: $P = (7,-1,0)$.

3. Sätt $f(x) = \arctan x - x + x^3/3$, när $x > 0$. Man har

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2-1+x^2} = \frac{x^2 1+x^2}{>}0,$$

när $x > 0$. Eftersom $f(x) \to f(0) = 0$ när $x \to 0^+$ gäller att $f(x) > 0$ när $x > 0$. Därmed gäller den i uppgiften påstådda olikheten.

4. Vi har $f(x) \to -\infty$, när $x \to -1$, så $x = -1$ är en lodrät asymptot (den enda).

Sätt de sneda asymptoterna till $y = ax + b$.

Vi har

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{2(x+1)^2} \to \frac{1}{2} = a,$$

när $x \to \pm\infty$.

Vidare är

$$f(x) - ax = = \frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2} = \frac{x^3 - x(x+1)^2}{2(x+1)^2} = \frac{-2x^2-x}{2(x+1)^2} \to -1 = b,$$

när $x \to \pm\infty$.

Så $y = x/2 - 1$ är sned asymptot när $x \to \pm\infty$.

Vi har

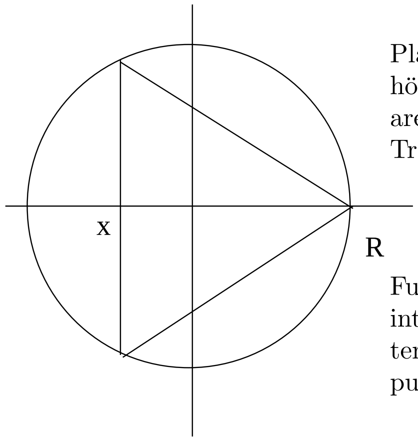
$$\begin{aligned}f'(x) = \frac{6x^2(x+1)^2 - 4x^3(x+1)}{2(x+1)^4} &= \frac{x^2(3(x+1)-2x)}{2(x+1)^4} = \\ &= \frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3},\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{(3x^2+6x)(x+1)^3 - (x^3+3x^2)3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \\ &= \frac{x((3x+6)(x+1) - (x^2+3x)3)}{(x+1)^4} = \frac{6x}{(x+1)^4}.\end{aligned}$$

Vi ser att $f''(x) < 0$ när $x < 0$ och $f''(x) > 0$, när $x > 0$. Detta ger att $f(x)$ är strängt konkav när $x \leq 0$ och strängt konvex när $x \geq 0$.

Svar: Lodrät asymptot är $x = -1$. Sned asymptot är $y = x/2 - 1$ (när $x \to \pm\infty$). Funktionen är strängt konkav när $x \leq 0$ och strängt konvex när $x \geq 0$.

5. 

Placera triangeln som i figuren. Det är klart att triangelns hörn måste ligga på cirkeln för att man ska få störst möjlig area.
Triangeln area ges av

$$f(x) = \frac{1}{2}(R-x)2\sqrt{R^2-x^2} = (R-x)\sqrt{R^2-x^2}.$$

Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[-R, R]$ och antar därför ett största värde. Eftersom $f(\pm R) = 0$ och $f(x) \geq 0$ antas det i en stationär punkt. Derivering ger

$$f'(x) = -\sqrt{R^2-x^2} - \frac{(R-x)x}{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{2x^2-Rx-R^2}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

så $f'(x) = 0$ precis när $0 = x^2 - Rx/2 - R^2/2$. Detta ger $x = R/4 \pm \sqrt{R^2/16 + R^2/2} = -R/2$, (R).

Den största arean är därför $f(-R/2) = (3R/2)\sqrt{3R^2/4} = 3\sqrt{3}R^2/4$.

Svar: $(3\sqrt{3}R^2/4$.

6. Differenskvoten för $g(x)$ när $x = \pi$ är

$$Q = \frac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi} = \pm\frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}.$$

Vi sätter $s = x - \pi$ och har att $s \to 0$, när $x \to \pi$.

Eftersom $1 + \cos x = 1 + \cos(s + \pi) = 1 - \cos(s) = 2\sin^2(s/2)$ är

$$Q = \pm\frac{1}{s}\sqrt{2\sin^2(s/2)} = \pm\frac{2|\sin^2(s/2)|}{s}.$$

När $s > 0$ är

$$Q = \frac{1}{s}\cdot\sqrt{2}\sin(s/2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sin(s/2)}{s/2} \to \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

när $s \to 0^+$.

När $s < 0$ är

$$Q = \frac{1}{s}\cdot\sqrt{2}\sin(s/2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sin(s/2)}{s/2} \to \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

när $s \to 0^-$.

Alltså är $g(x)$ deriverbar i $x = \pi$ och $g'(\pi) = 1/\sqrt{2}$.

Svar: $g'(\pi) = 1/\sqrt{2}$.

(b) (i), (iii) och (iv) är inte möjliga. Värdemängden till en kontinuerlig funktion på ett slutet begränsat intervall (som $[0, 1]$) är också ett sådant intervall.
(ii) Ett exempel är (t.ex.) $f(x) = x$.